
Fiche 10. Intégration par parties

Savoir.

- Connaître la formule d'intégration par parties.

Savoir-faire.

- Savoir calculer un intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

Vidéo ■ [Fiche 10. Intégration par parties](#)

Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a, b]$. On cherche à calculer $\int_a^b u(x)v'(x)dx$ à l'aide d'une méthode donnée par la formule suivante.

Formule d'intégration par parties (IPP).

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

- On rappelle que $[F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $[u(x)v(x)]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.
- N'oubliez pas le signe « moins » dans la formule !
- Cette méthode ne fonctionne que si l'intégrale tout à droite $\int_a^b u'(x)v(x) dx$ est plus facile à calculer que l'intégrale de départ.
- La preuve de la formule est basée sur la formule $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Ainsi $\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$. Mais une primitive de $(uv)'$ est uv donc $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Exemples

Exemple 1. On veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x) dx.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$, alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$ (une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$).

Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin(x) dx &= [-x \cos(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -1 \cdot \cos(x) dx \\ &= \left(-\frac{\pi}{4} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 0 \cos(0)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x) dx \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + [\sin(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \\ &= -\frac{\pi}{4} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &= \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Exemple 2.

On veut calculer

$$I = \int_1^2 x e^x dx.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = e^x$. Ainsi,

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2 x e^x dx = [x e^x]_1^2 - \int_1^2 e^x dx \\ &= (2e^2 - e) - [e^x]_1^2 = (2e^2 - e) - (e^2 - e) \\ &= e^2. \end{aligned}$$

Remarques.

- On pourrait calculer $J = \int_1^2 x^2 e^x dx$ par deux intégrations par parties successives : en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, la formule ne donne pas directement le résultat mais conduit à une formule avec l'intégrale $I = \int_1^2 x e^x dx$ que l'on a déjà calculée ci-dessus.
- *Astuce.* Pour calculer $\int_a^b \ln(x) dt$ par intégration par parties, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(x) \times 1$ afin de faire apparaître artificiellement une multiplication.