Fiche 8. Primitives

Savoir.
- ☐ Connaître la définition d'une primitive.
- ☐ Connaître les formules des primitives usuelles.

Savoir-faire.
- ☐ Savoir déterminer une primitive.
- ☐ Savoir utiliser les primitives pour calculer des intégrales.

Vidéo ■ Fiche 8. Primitives

Primitives

— **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f si pour tout $x \in I$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

— Exemples.
  — $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$.
  — $\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

— Trouver une primitive est l'opération inverse du calcul de la dérivée.

— Exercice. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- x
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- e^{-x}
- $\dfrac{3}{x} - \dfrac{7}{x^2} + 1$
- $\frac{1}{\cos^2(x)}$

Calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

— C'est le moyen le plus efficace pour calculer des intégrales !

— Notation par des crochets. $\boxed{\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)}$.

— Exemple.

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

— Exemple.

$$\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x)\big]_2^7 = \ln(7) - \ln(2) = \ln\left(\tfrac{7}{2}\right).$$

Toutes les primitives

— Une primitive n'est pas unique ! Soit $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive. Mais la fonction $G(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ est aussi une primitive (dérivez-la pour vérifier). Il y a donc plusieurs primitives. En fait toutes les fonctions $\frac{x^3}{3} + c$, où c est une constante, sont des primitives. Nous généralisons ceci à toutes les fonctions :

> **Proposition.** Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors les autres primitives sont de la forme $F(x) + c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Exemple. Les primitives de $x^4 - 3x + 5$ sont les fonctions $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

— Exercice. Vérifier que les primitives de la fonction $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sont les fonctions $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$.

— Pour calculer une intégrale, vous choisissez la primitive que vous voulez car $\big[F(x)\big]_a^b$ donne le même résultat quelle que soit la primitive.

Primitives usuelles

Primitives des fonctions classiques

Ici c désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitives**
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \quad$ (c'est $\alpha = \frac{1}{2}$)
e^x	$e^x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Ces formules sont à maîtriser ! Mais ce sont juste les formules des dérivées que vous connaissez déjà.

Primitives pour une composition

Ici u est une fonction qui dépend de x ; c désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitive**
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + c$
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$u'e^u$	$e^u + c$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + c$

— Exemple. Comment calculer $\int_1^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$? Avec $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) on a $2xe^{x^2} = u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive est $e^{x^2} = e^{u(x)}$. Ainsi

$$\int_1^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

— Exemple. On sait que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. Par le tableau précédent, les primitives de la fonction tangente sont les fonctions de la forme $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + c$ où c est une constante réelle.