Fiche 7. Intégrales

Savoir.

- ☐ Comprendre le lien entre intégrale et aire.
- ☐ Connaître les propriétés de l'intégrale.

Savoir-faire.

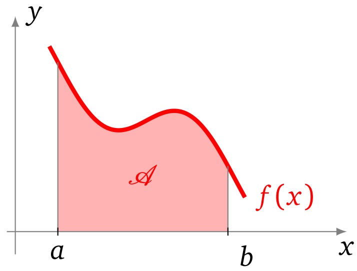
- ☐ Savoir calculer des intégrales simples.

Vidéo ■ Fiche 7. Intégrales

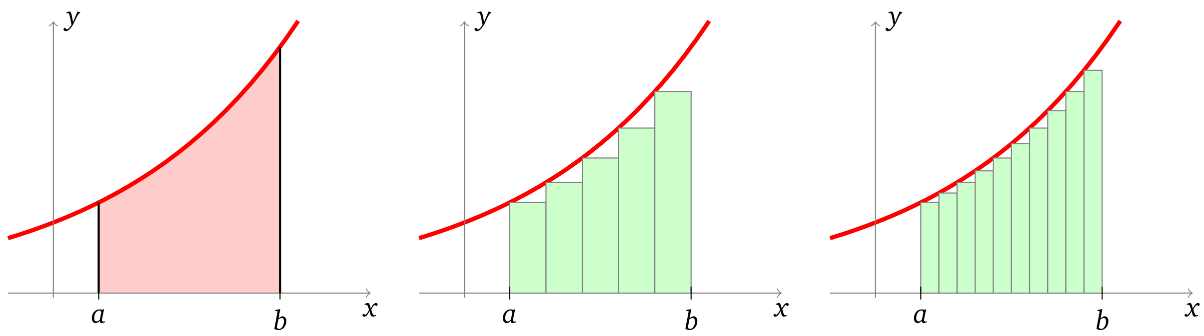
Intégrale et aire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nous définissons l'intégrale comme l'aire sous la courbe de f.

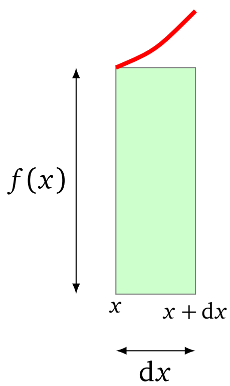
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Pour calculer l'aire et définir l'intégrale, on découpe l'intervalle $[a,b]$ et on construit des rectangles sous le graphe. Plus la base des rectangles est petite, plus l'ensemble des rectangles approche mieux l'aire sous la courbe.

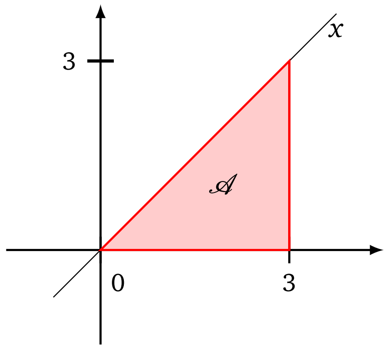


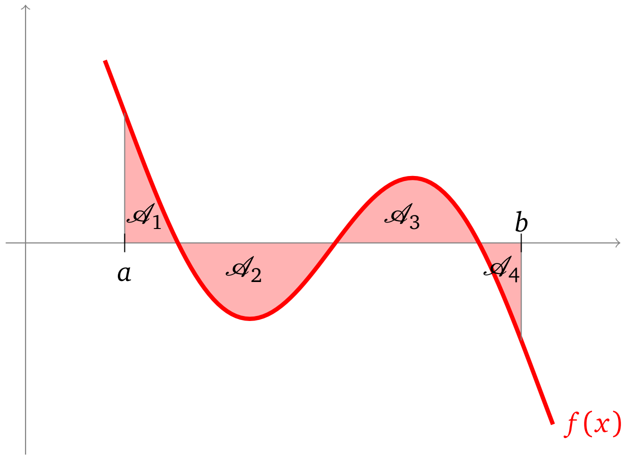
Un rectangle élémentaire entre x et $x+\mathrm{d}x$ a pour base $\mathrm{d}x$ (où $\mathrm{d}x$ désigne ici un élément infinitésimal) et pour hauteur $f(x)$ donc son aire vaut $f(x)\times \mathrm{d}x$. Ainsi l'aire sous la courbe est approchée par une somme de termes $f(x)\mathrm{d}x$, pour x variant de a à b. Cette somme est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Le symbole $\int$ étant un S allongé (pour Somme).



Exemple.

$$\int_0^3 x\,\mathrm{d}x = \text{ aire du triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{9}{2}$$





Signe. L'intégrale compte les aires avec un signe « + » ou « − ». Les aires sous l'axe des abscisses sont comptées négativement. Si on note $\mathscr{A}_i > 0$ les aires ci-contre, alors

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 - \mathscr{A}_4$$

Propriétés de l'intégrale.

— L'intégrale est **linéaire** :

$$\boxed{\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \; + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{et} \qquad \int_a^b k \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = k \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

— La relation de Chasles est vérifiée :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \; + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Avec $\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemple.

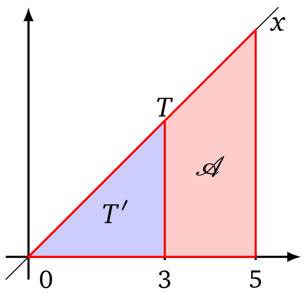
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2xe^x - 7\cos(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xe^x\,\mathrm{d}x \; - \; 7\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\,\mathrm{d}x$$

Ainsi la linéarité permet de se ramener au calcul d'intégrales plus simples. (On verra dans les autres fiches comment calculer ces intégrales.)

Exemple. Comment calculer $\int_3^5 x\,\mathrm{d}x$?

On peut utiliser la relation de Chasles sur les bornes :

$$\underbrace{\int_0^5 x\,\mathrm{d}x}_{\text{aire du triangle } T} = \underbrace{\int_0^3 x\,\mathrm{d}x}_{\text{aire du triangle } T'} + \underbrace{\int_3^5 x\,\mathrm{d}x}_{\mathscr{A}}$$



Ainsi en utilisant la formule $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$ pour calculer l'aire des deux triangles, on a :

$$\frac{5\times 5}{2} = \frac{3\times 3}{2} + \mathscr{A}.$$

Ainsi

$$\mathscr{A} = \int_3^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{25}{2} - \frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Exercice. Retrouver cette aire en utilisant la formule générale de l'aire d'un trapèze.

$$\mathscr{A} = \frac{(\text{petite base} + \text{grande base})}{2} \times \text{hauteur} = \frac{(b+B)}{2} \times h$$