Fiche 4. Étude de fonctions

Savoir.

- ☐ Connaître les différentes étapes d'une étude de fonction.
- ☐ Connaître ses formules : fonctions usuelles, dérivées, limites.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir faire une étude complète de fonction.
- ☐ Savoir tracer le graphe d'une fonction.
- ☐ Savoir calculer les asymptotes.

On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Cet exemple servira de modèle pour expliquer comment réaliser une étude de fonction.
Les différentes étapes sont les suivantes (qu'il faudra éventuellement adapter selon la fonction).

1. Domaine de définition
2. Calcul de la dérivée
3. Calcul des limites
4. Sens de variation
5. Tableau de variations
6. Représentation graphique
7. Asymptotes

1. Domaine de définition

Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f c'est répondre à la question : "Pour quels réels x l'expression $f(x)$ a-t-elle un sens ?"

— On sait que la fraction $\dfrac{x^2+1}{x}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

— On sait que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

Il suffit donc de déterminer les réels non nuls x tels que $\frac{x^2+1}{x} > 0$. Mais, comme $x^2+1 > 0$, cela équivaut à $x > 0$ et donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0,+\infty[$.

2. Calcul des limites

Pour une fonction f donnée, on détermine ses limites sur la frontière de son ensemble de définition.

Dans notre exemple $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$, on a montré que $\mathscr{D}_f =]0,+\infty[$. Ainsi, nous allons déterminer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Limite à droite en 0**.**

— On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2+1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

— On sait que $\lim\limits_{y\to +\infty} \ln(y) = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = +\infty$.

Limite en $+\infty$.

— Pour tout $x>0$ on a :

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

— On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\frac{1}{x^2}=1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{x}=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)=+\infty$.

3. Calcul de la dérivée

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculons sa dérivée f'.

— On sait que f est de la forme $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=\frac{x^2+1}{x}$. Donc, pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$.

— On sait que u est de la forme $u(x)=\frac{v(x)}{w(x)}$ avec $v(x)=x^2+1$ et $w(x)=x$. Donc, pour tout $x>0$, on a : $u'(x)=\frac{v'(x)w(x)-v(x)w'(x)}{(w(x))^2}$.

— On sait que $v'(x)=2x$ et $w'(x)=1$. Ainsi, $u'(x)=\frac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}=\frac{x^2-1}{x^2}$.

On peut donc conclure que, pour tout $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x^2}\times\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.$$

4. Sens de variation

Le signe de la dérivée d'une fonction permet de déterminer son sens de variation.

Rappel. Soit I un intervalle et $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

a) Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement croissante sur I.

b) Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement décroissante sur I.

c) Si $f'(x)=0$ pour tout $x\in I$ alors f est constante sur I.

Dans notre exemple, commençons par déterminer le signe de f'. On sait que, pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$. Or, pour tout $x>0$, on a $x(x^2+1)>0$. Ainsi, le signe de f' ne dépend que de celui de x^2-1 pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Déterminons le signe de x^2-1 : comme $x^2-1=(x-1)(x+1)$ (nous utilisons l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ avec $a=x$ et $b=1$) alors $x^2-1<0$ pour tout $x\in]-1,1[$ et $x^2-1>0$ pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Ainsi,

— on obtient : $f'(x)<0$ pour tout $x\in]0,1[$,

— on obtient : $f'(x)>0$ pour tout $x\in]1,+\infty[$,

— et $f'(1)=0$.

D'où :

— La fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$,

— La fonction f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

— le graphe de la fonction f admet une tangente horizontale en 1.

5. Tableau de variations

Le tableau de variations permet de récapituler toutes les informations précédemment trouvées sur la fonction à étudier.

Dans le cas de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$, voici le tableau de variations que l'on obtient.

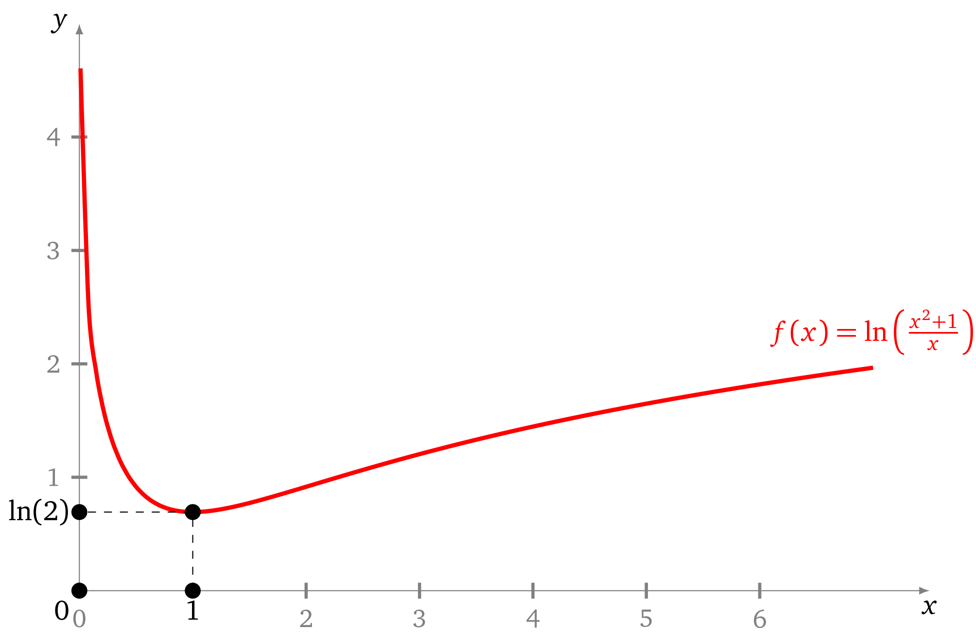
x	0			1		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\|\|$	$+\infty$	$\searrow$	$\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

On obtient également que f admet un minimum local, qui est ici global, en $x = 1$. Ce minimum global vaut $f(1) = \ln\left(\dfrac{1^2+1}{1}\right) = \ln(2)$.

6. Représentation graphique

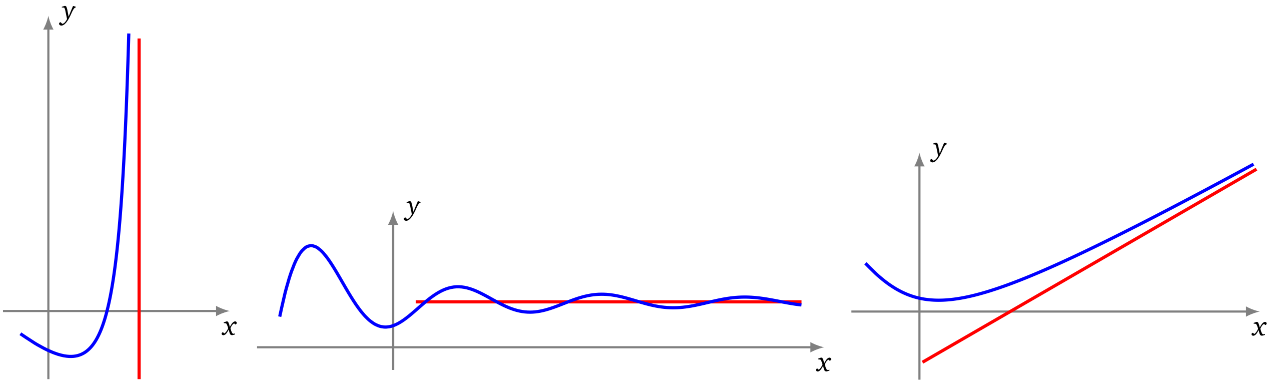
Le graphe d'une fonction est obtenu à partir des informations contenues dans le tableau de variation et du calcul de quelques valeurs.

Voici la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$.



7. Asymptotes

De gauche à droite : asymptote verticale, horizontale, oblique.



- **Asymptote verticale.** Si, quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* au graphe de f.
- **Asymptote horizontale.** Si, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* au graphe de f.
- **Asymptote oblique.** La droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* au graphe de f :
  a) si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers un réel a,
  b) et si $f(x) - ax$ tend vers un réel b.

Pour l'exemple utilisé dans cette fiche, le graphe de f admet une asymptote verticale en 0^+. Des exemples d'asymptotes obliques seront faits en exercices.