
Fiche 2. Dérivées

Savoir.

- Comprendre la définition de la dérivée en terme de limite.
- Connaître les formules de la dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
- Connaître sur le bout de doigts les formules des dérivées usuelles.

Savoir-faire.

- Savoir calculer l'équation de la tangente au graphe d'une fonction.
- Savoir dériver les fonctions construites à partir de fonctions usuelles.
- En particulier savoir dériver les compositions de fonctions.

Définition

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en x_0 est défini par une limite :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Une autre écriture de cette limite est :

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Une autre notation pour $f'(x_0)$ est $\frac{df}{dx}(x_0)$.

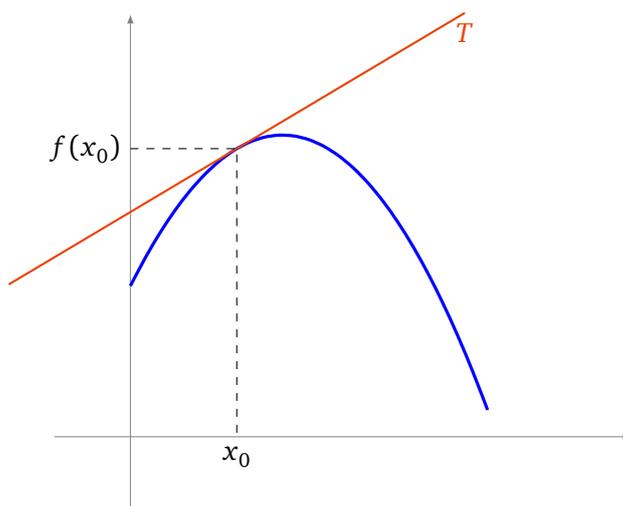
La **fonction dérivée** est $x \mapsto f'(x)$.

Tangente

La dérivée en x_0 est le coefficient directeur de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$.

L'équation de cette tangente est :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$



Exemple : quelle est l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 1$? On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f(x_0) = f(1) = e^2$, $f'(x_0) = f'(1) = 2e^2$. L'équation de la tangente est $y = (x - 1)2e^2 + e^2$, ce qui s'écrit aussi $y = 2e^2x - e^2$.

Opérations sur les dérivées

— Somme. $(f + g)' = f' + g'$

— Produit par un réel. $(kf)' = kf'$ où $k \in \mathbb{R}$

— Produit. $(f \times g)' = f'g + fg'$

— Inverse. $\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$

— Quotient. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = xe^x + \ln(x)$. Il y a un produit (xe^x) et une somme. Ainsi :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (xe^x)' + (\ln(x))' \quad (\text{somme}) \\ &= (x)'e^x + x(e^x)' + \frac{1}{x} \quad (\text{produit et dérivée de } \ln) \\ &= e^x + xe^x + \frac{1}{x} \quad (\text{dérivée de exp}) \\ &= (x+1)e^x + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = \tan(x)$. Par définition $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Il s'agit de dériver un quotient.

$$\begin{aligned} \tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\ &= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\ &= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\ &= \frac{1}{\cos^2(x)} \end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. En repartant de l'avant-dernière égalité on a aussi :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Formules

Les dérivées des fonctions classiques (à gauche) et les formules pour la composition (à droite, où u est une fonction qui dépend de x).

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{u}	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u' e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Exemples.

- $F(x) = \ln(x^2)$ alors en posant $u = x^2$ (et donc $u' = 2x$), on a $F(x) = \ln(u)$ et donc $F'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.
- $F(x) = \exp(\frac{1}{x})$ alors en posant $u = \frac{1}{x}$ (et donc $u' = -\frac{1}{x^2}$), on a $F(x) = \exp(u)$ et donc $F'(x) = u' \exp(u) = -\frac{1}{x^2} \exp(\frac{1}{x})$.
- $F(x) = \sqrt{\ln(x)}$ alors en posant $u = \ln(x)$ (et donc $u' = \frac{1}{x}$), on a $F(x) = \sqrt{u}$ et donc $F'(x) = \frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2} \frac{1}{x} \frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$.