Fiche 1. Fonctions usuelles

Savoir.

- ☐ Connaître les fonctions usuelles, leur domaine de définition, leurs limites, l'allure du graphe et leur dérivée.
- ☐ Maîtriser la fonction exponentielle et la fonction logarithmique.
- ☐ Réviser ses formules trigonométriques.

Savoir-faire.

- ☐ Déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- ☐ Savoir utiliser l'égalité $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ dans les deux sens.

Domaine de définition

— Une fonction f associe à un réel x un réel noté $f(x)$.

— Exemple :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Alors $f(3) = 9$, $f(-4) = 16$.

— Exemple :

$$f: \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction n'est pas définie pour des $x < 0$.

— Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des x, où l'expression $f(x)$ est définie.
Note. Si on vous donne l'expression d'une fonction f, sans préciser l'ensemble de départ c'est à vous de déterminer le domaine de définition !

— Exemples : trouvons le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty,-1[\ \cup\ ]-1,+\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} \qquad \mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,+2\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad \mathscr{D}_f =]-\infty,-2]\ \cup\ [+2,+\infty[$$

Fonction polynôme

— Une **fonction monôme** est définie par $f(x) = x^k$ où $k \in \mathbb{N}$ est un entier.

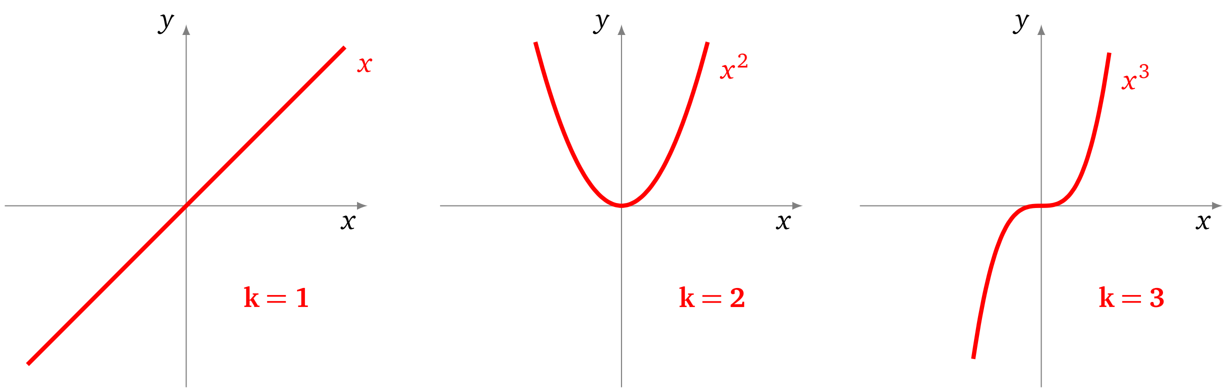
— Le domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

— La dérivée est $\boxed{(x^k)' = kx^{k-1}}$.

— Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont :

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

— Une **fonction polynôme** est une somme de fonctions monômes. Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3 - 4x + 13$ sont des fonctions polynômes.



Fonction inverse

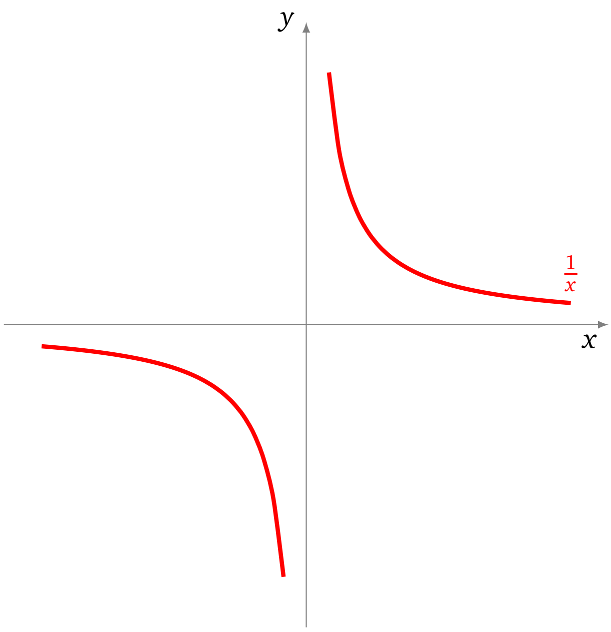
— La **fonction inverse** est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, notée aussi $f(x) = x^{-1}$.

— Le domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car il est interdit de diviser par 0.

— La dérivée est $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$.

— Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



Fonction exponentielle

— La **fonction exponentielle** $f(x) = \exp(x)$ se note aussi par $f(x) = e^x$.

— Son domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.

— On a $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

— $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e \simeq 2.718$.

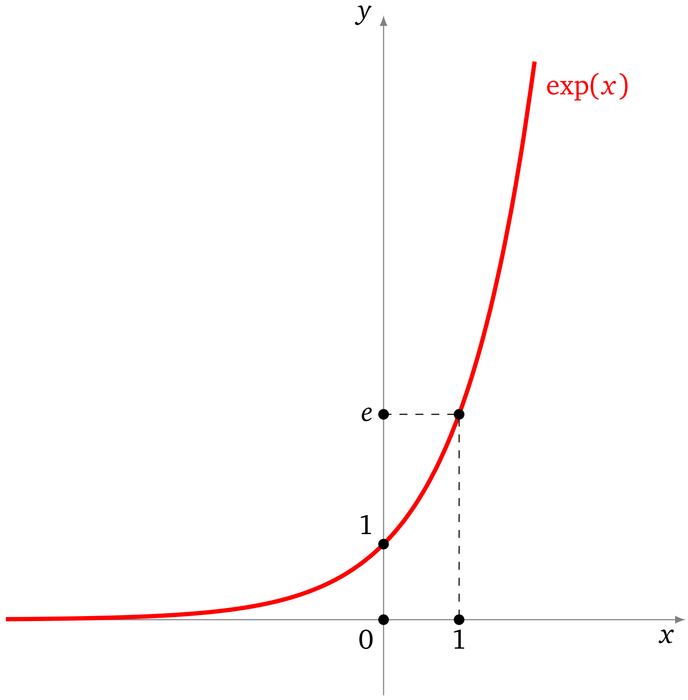
— La dérivée est la fonction elle-même : $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.

— Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

— Propriétés :

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b} \qquad \boxed{(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}} \qquad \boxed{(e^{-x}) = \frac{1}{e^x}}$$



Fonction logarithme

— Le **logarithme népérien** se note $f(x) = \ln(x)$.

— Son domaine de définition est $\mathcal{D}_f =]0, +\infty[$. Le logarithme n'est pas défini pour des x négatifs ou nuls.

— $\ln(1) = 0, \ \ln(e) = 1$.

— Propriétés :

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)} \qquad \boxed{\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)} \qquad \boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$$

— Le logarithme est la bijection réciproque de l'exponentielle :

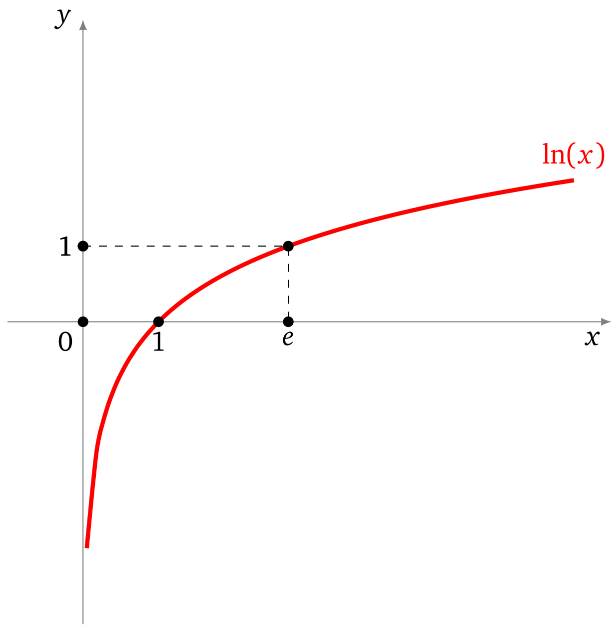
$$\boxed{\ln(\exp(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\exp(\ln(x)) = x \qquad \text{pour tout } x > 0}$$

— La dérivée du logarithme est la fonction inverse $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

— Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

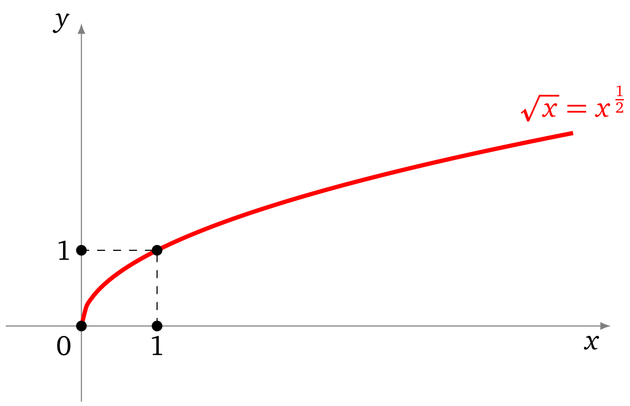


Fonctions puissances

- Les **fonctions puissances** $f(x) = x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, généralisent les fonctions polynômes (où l'exposant était un entier).
- Elles sont définies par :

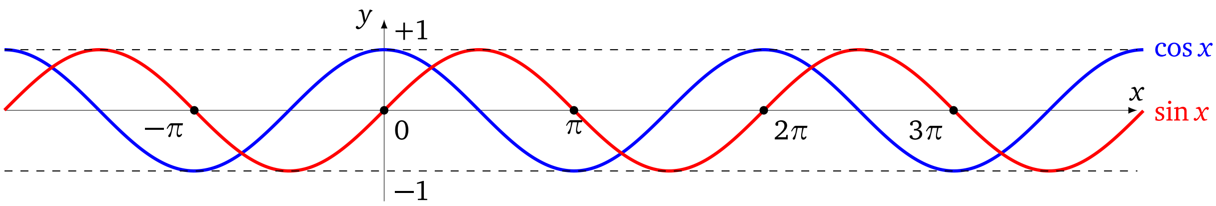
$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

  Autrement dit $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
- Le domaine de définition est $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.
- La dérivée est $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$.
- Exemple (carré) : $\alpha = 2$, on retrouve la fonction carrée $x^\alpha = e^{2\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^2 = x^2$.
- Exemple (racine carrée) : $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, qui vérifie bien sûr $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$.
- Exemple (racine cubique) : $\alpha = \frac{1}{3}$, alors $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, qui vérifie $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$.

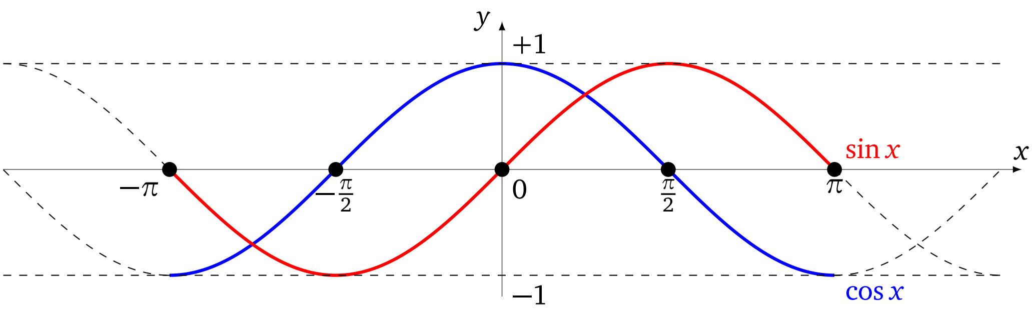


Sinus, cosinus, tangente

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Les dérivée sont $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$ et $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$.



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

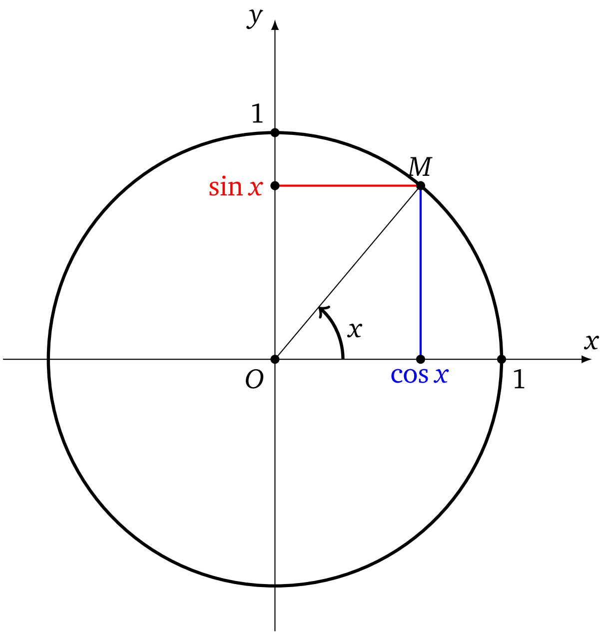


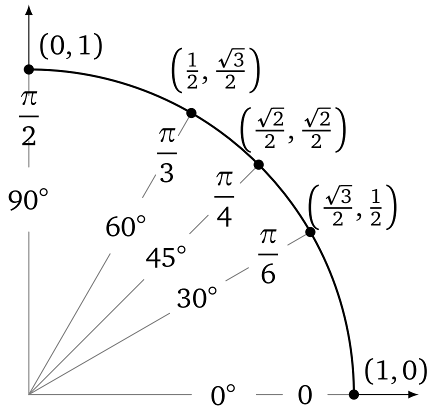
— La **tangente** est définie par $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$. Elle est définie si $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sa dérivée peut s'écrire de deux façons différentes : $\boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$

Rappels de trigonométrie

$$\begin{aligned} &\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\ &\cos(x + 2\pi) = \cos x \\ &\sin(x + 2\pi) = \sin x \end{aligned}$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	


y
1
M
$\sin x$
x
x
O
$\cos x$
1


$(0, 1)$
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{3}$
$\frac{\pi}{4}$
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
90°
60°
45°
$\frac{\pi}{6}$
30°
0°
0
$(1, 0)$