Équations différentielles

Exercice 12.

On observe une population de microbes se développant de manière malthusienne, c'est-à-dire dont le taux de croissance au temps t (en heures) est proportionnel à la taille de la population $N(t)$.

a) En notant k la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.

b) Montrer que les fonctions $N(t) = Ce^{kt}$ (où C est une constante) sont solutions de cette équation différentielle.

c) Que représente C ?

d) Si $k = \ln 2$, que peut-on dire de la population au bout d'une heure ?

e) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, quelle sera, d'après le modèle, la taille de la population au bout de 4 heures et 20 minutes ?

f) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 1000 individus ?

Indications 12.

L'équation différentielle est une égalité qui relie le taux de croissance $N'(t)$ à la population $N(t)$.

Correction 12.

Correction vidéo ■

a) Si $N(t)$ dénote la taille de la population à l'instant t, le taux de croissance au temps t est donné par $N'(t)$. Alors on obtient l'équation différentielle

$$N'(t) = kN(t). \tag{1}$$

b) Soit $N(t) = Ce^{kt}$. Sa dérivée est

$$N'(t) = (Ce^{kt})' = C(e^{kt})' = Cke^{kt}.$$

De plus, $kN(t) = kCe^{kt} = Cke^{kt}$. Comme on obtient $N'(t) = kN(t)$, alors les fonctions de la forme $N(t) = Ce^{kt}$, $C \in \mathbb{R}$, sont solutions de (1).

c) Comme $N(0) = Ce^0 = C$, C est la taille de la population au début. Donc $N(t) = N(0)e^{kt}$.

d) On remplace k par $\ln(2)$. Alors $N(1) = N(0)e^{\ln(2)} = 2N(0)$ car $e^{\ln(2)} = 2$. Donc au bout d'une heure la population a doublé.

e) Pour $N(0) = 100$ et $k = \ln(2)$ on a $N(t) = 100 \cdot e^{t\ln(2)} = 100 \cdot (e^{\ln(2)})^t = 100 \cdot 2^t$. Donc

$$N\left(4 + \frac{1}{3}\right) = N\left(\frac{13}{3}\right) = 100 \cdot 2^{13/3} \approx 2015.$$

f) On a $N(t) = 100 \cdot 2^t$ et on cherche le temps T tel que $N(T) = 100 \cdot 2^T = 1000$.

$$100 \cdot 2^T = 1000 \iff 2^T = 10 \iff \ln(2^T) = \ln(10) \iff T\ln(2) = \ln(10) \iff T = \frac{\ln(10)}{\ln(2)} \approx 3,32.$$

Au bout de 3 heures et 20 minutes environ la population atteindra 1000 individus.

Exercice 15.

On considère le problème :

$$y'(t) = -t^2 y(t) \quad \text{pour } t \geqslant 0, \tag{1}$$
$$y(0) = y_0. \tag{2}$$

a) Montrer que la fonction constante $y(t) = 0$ est solution de (1). Y a-t-il d'autres solutions constantes ?

b) On suppose que y est une solution de (1) et (2) et on suppose $y_0 > 0$.

(i) Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \geqslant 0$ (*on admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

(ii) Montrer que y est décroissante sur $[0; +\infty[$. En déduire que $y(t)$ admet une limite quand $t \to +\infty$.

c) On pose $u(t) = at^3 + b$ et $Y(t) = e^{u(t)}$ où a et b sont des constantes.

(i) Calculer $u'(t)$ et $Y'(t)$.

(ii) Déterminer la constante a pour que $Y(t)$ soit solution de (1).

(iii) Calculer $Y(0)$. Comment faut-il choisir b pour avoir $Y(0) = y_0$?

(iv) Calculer $\lim_{t\to+\infty} Y(t)$, en prenant pour a et b les valeurs trouvées dans les questions précédentes.

Indications 15.

Pour a), remplacer y dans (1) par une fonction constante. Pour b) (ii) utiliser l'équation (1).

Correction 15.

`Correction vidéo` ■

a) Soit $c \in \mathbb{R}$. Soit $y(t) = c$ la fonction constante égale à c sur $[0; +\infty[$. On a $y'(t) = 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$. Donc y est solution constante de (1) si et seulement si :

$$0 = -t^2 c \quad \text{pour tout } t \in [0; +\infty[.$$

Cela n'est vrai que si $c = 0$. Ainsi la fonction constante égale à 0 est bien solution de (1) et aucune autre fonction constante n'est solution de (1).

b) Soit y une solution de (1) et (2) avec $y_0 > 0$.

(i) Comme $y_0 > 0$, y n'est pas la fonction constante égale à 0. Ainsi le graphe de y ne coupe jamais le graphe de la fonction constante égale à 0, c'est-à-dire l'axe des abscisse. Comme y est une fonction continue, on en déduit qu'elle est de signe constant. Comme $y_0 > 0$, on en conclut que $y(t) > 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$.

(ii) En utilisant l'équation (1), on déduit de la question précédente que $y'(t) \leqslant 0$ pour tout $t \in [0; +\infty[$. Donc y est décroissante sur $[0; +\infty[$. Comme est elle minorée (par 0), on en déduit qu'elle admet une limite ($l \geqslant 0$) quand $t \to +\infty$.

c) (i) On calcule pour tout $t \in [0; +\infty[$:

$$u'(t) = 3at^2,$$
$$Y'(t) = u'(t)e^{u(t)} = 3at^2 e^{at^3+b}.$$

(ii) Y est solution de (1) si et seulement si :

$$3at^2 e^{at^3+b} = -t^2 e^{at^3+b} \quad \text{pour tout } t \in [0; +\infty[.$$

Cela est vrai si et seulement si $a = -\frac{1}{3}$.

(iii) On a $Y(0) = e^b$. On en déduit que $Y(0) = y_0$ si et seulement si $b = \ln(y_0)$.

(iv) Avec $a = -\frac{1}{3}$ et $b = \ln(y_0)$ on a

$$Y(t) = y_0 e^{-\frac{t^3}{3}} \quad \text{pour tout } t \in [0; +\infty[.$$

On en déduit que $\lim_{t\to+\infty} Y(t) = 0$.

Exercice 18.

On considère le problème représenté par les deux équations suivantes :

$$y'(t) = (y(t)-1)^2(y(t)+1) \quad (1)$$
$$y(0) = 0 \quad (2)$$

et l'on suppose qu'il existe une fonction $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution de ce problème.

a) Chercher les solutions constantes de l'équation différentielle (1).

b) Montrer que la solution y du problème est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

c) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Calculer l en admettant que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$.

Indications 18.

Vous devez étudier le signe de $y'(t)$ en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais.

Correction 18.

`Correction vidéo` ■

a) On pose $y(t) = c$, $t \geqslant 0$. Donc $y'(t) = 0$, $t \geqslant 0$. Si on remplace $y'(t)$ par 0 et $y(t)$ par c dans (1) on obtient

$$0 = (c-1)^2(c+1) \iff c-1=0 \text{ ou } c+1=0 \iff c=1 \text{ ou } c=-1.$$

Donc les solutions constants sont $y_1(t) = -1$ et $y_2(t) = 1$, $t \geqslant 0$.

b) Étudions le signe de y. On sait que $y(0) = 0$ et donc $y_1(0) < y(0) < y_2(0)$. Comme les graphes graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais et $y_1(0) < y(0) < y_2(0)$, le graphe de y est toujours en dessous de celui de y_2 et au-dessus de celui de y_1. Alors

$$-1 = y_1(t) < y(t) < y_2(t) = 1, \ t \geqslant 0,$$

et on obtient le tableau de variation suivant :

t	$0 \qquad +\infty$
$(y(t)-1)^2$	$+$
$y(t)+1$	$+$
$y'(t)$	$+$
$y(t)$	$0 \nearrow$

Comme $y'(t) \geqslant 0$, alors la fonction y est croissante.

c) Comme la fonction $y(t)$ est croissante et majorée par 1 (car $y(t) \leqslant y_2(t) = 1$), la limite $l := \lim_{t\to+\infty} y(t)$ existe. De plus, $0 \leqslant l \leqslant 1$. En admettant que $\lim_{t\to+\infty} y'(t) = 0$ et en utilisant (1), on obtient :

$$0 = \lim_{t\to+\infty} y'(t) = \lim_{t\to+\infty} (y(t)-1)^2(y(t)+1) = (\lim_{t\to+\infty} y(t)-1)^2(\lim_{t\to+\infty} y(t)+1) = (l-1)^2(l+1).$$

Comme $0 = (l-1)^2(l+1) \iff l = -1$ ou $l = 1$, mais $l \geqslant 0$, on déduit donc que $l = 1$.