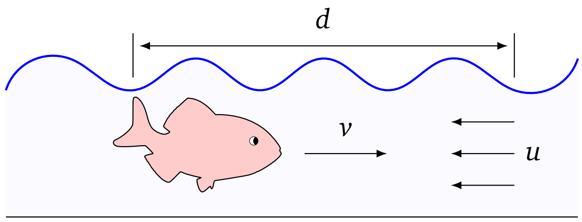
Problèmes d'optimisation

Exercice 7.

L'énergie dépensée par un poisson pour remonter une distance d d'un courant de vitesse u à la vitesse v est donnée par

$$E(v) = v^3 \frac{d}{v-u}.$$



a) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?
b) On se restreindra ici au domaine $]u, +\infty[$. Expliquer pourquoi.
c) Étudier la fonction E sur $]u, +\infty[$.
d) En déduire la vitesse v qui minimise l'énergie $E(v)$, puis calculer cette énergie minimale.

Indications 7.

Pour étudier la fonction il faut d'abord dériver la fonction $E(v)$ et étudier le signe de $E'(v)$.

Correction 7.

Correction vidéo ■

a) Le domaine de définition est $\mathbb{R} \setminus \{u\}$, car pour $v = u$ il y aurait une division par zéro.
b) Dans la pratique le poisson ne peut remonter le courant que si $v > u$, donc on étudie la fonction pour $v \in]u, +\infty[$.
c)

$$E'(v) = d\left(\frac{v^3}{v-u}\right)' = d\frac{3v^2(v-u) - v^3 \cdot 1}{(v-u)^2} = d\frac{v^2(2v-3u)}{(v-u)^2}$$

Le signe de E' ne dépend que du signe de $2v - 3u$.

v	u		$\frac{3}{2}u$		$+\infty$
$E'(v)$	‖	$-$	0	$+$	
$E(v)$	‖	↘	min.	↗	

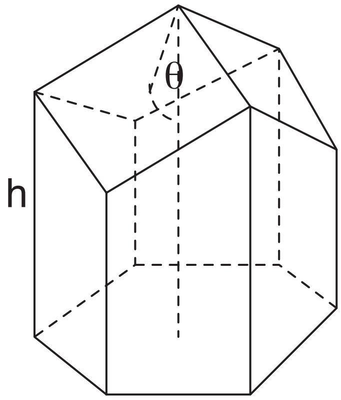
d) L'énergie est minimale pour $v = \frac{3}{2}u$, c'est-à-dire lorsque le poisson nage à une vitesse valant 150% de celle du courant.

Exercice 10.

Dans une ruche, chaque alvéole a une forme de prisme hexagonal à fond rhombique dont la surface est donnée, pour une longueur de côté s et une hauteur h, par

$$A(\theta) = 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\sin(\theta)}$$

où θ désigne l'angle au sommet du prisme.



a) Quelle est le domaine de définition de cette fonction ?

b) On se restreindra ici au domaine $]0,\pi[$. Expliquer pourquoi.

c) Etudier la fonction A sur $]0,\pi[$.

d) En déduire l'angle θ qui minimise la surface $A(\theta)$ d'une telle alvéole et déterminez, en fonction de s et h, la surface correspondante.

Dans la réalité, les alvéoles ont l'angle θ optimal à ± 2 degrés près.

Indications 10.

On utilisera la fonction arccos : $[-1;1] \to [0;\pi]$ définie par $\arccos(x) = \theta \iff \cos(\theta) = x$. De plus on a $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [0;1]$.

Correction 10.

Correction vidéo ■

a) L'expression définissant $A(\theta)$ est bien définie si et seulement si les dénominateurs sont non nuls, i.e. $\sin(\theta) \neq 0$. Or, $\sin(\theta) = 0$ si et seulement $\theta = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, ce que l'on peut réécrire $\theta \in \pi\mathbb{Z}$. On en déduit que le domaine de définition de A est $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

b) L'angle au sommet du prisme doit avoir une mesure comprise dans l'intervalle $]0;\pi[$. On peut donc restreindre le domaine de A à l'intervalle $]0;\pi[$ (ou à n'importe lequel des intervalles $]k;k+\pi[$ avec $k \in \mathbb{Z}$).

c) On calcule la dérivée :

$$\begin{aligned}
A'(\theta) &= -\frac{3}{2}s^2\frac{\cos'(\theta)\sin(\theta)-\cos(\theta)\sin'(\theta)}{\sin(\theta)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{-\sin'(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= -\frac{3}{2}s^2\frac{-\sin(\theta)^2-\cos(\theta)^2}{\sin(\theta)^2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{-\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= -\frac{3}{2}s^2\frac{-1}{\sin(\theta)^2} - \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2} \\
&= \frac{3}{2}s^2\frac{1-\sqrt{3}\cos(\theta)}{\sin(\theta)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A'(\theta) = 0 \iff 1-\sqrt{3}\cos(\theta) = 0 \iff \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

On en déduit le tableau de variation de A :

θ	0		$\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})$		π
$A'(\theta)$	‖	$-$	0	$+$	‖
$A(\theta)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	‖

d) L'angle θ qui minimise la surface $A(\theta)$ est $\theta = \arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}) \simeq 0,955$. Soit environ $54,7°$.
Pour la surface correspondante c'est un peu plus compliqué. On a :

$$\cos(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \frac{1}{\sqrt{3}},$$
$$\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) = \sqrt{1-(\frac{1}{\sqrt{3}})^2} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

La surface correspondante est donc :

$$\begin{aligned}
A(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}})) &= 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\cos(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))}{\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\sin(\arccos(\frac{1}{\sqrt{3}}))} \\
&= 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} \\
&= 6sh - \frac{3}{2\sqrt{2}}s^2 + \frac{9}{2\sqrt{2}}s^2 \\
&= 6sh + \frac{3}{\sqrt{2}}s^2.
\end{aligned}$$