Cours de mathématiques pour la SVT

Le module de mathématiques est composé de révisions et d'approfondissements sur les fonctions.
Le travail est principalement axé sur la pratique.
Le cours est un support qui vous aide à réussir les exercices.

Certains cours sont disponibles en vidéos : ■ Mathématiques pour la SVT ■

Auteurs : Arnaud Bodin et Cécile Mammez

Fiche 1. Fonctions usuelles

Savoir.

- ☐ Connaître les fonctions usuelles, leur domaine de définition, leurs limites, l'allure du graphe et leur dérivée.
- ☐ Maîtriser la fonction exponentielle et la fonction logarithmique.
- ☐ Réviser ses formules trigonométriques.

Savoir-faire.

- ☐ Déterminer le domaine de définition d'une fonction.
- ☐ Savoir utiliser l'égalité $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ dans les deux sens.

Domaine de définition

— Une fonction f associe à un réel x un réel noté $f(x)$.

— Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$

Alors $f(3) = 9$, $f(-4) = 16$.

— Exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

La fonction n'est pas définie pour des $x < 0$.

— Le **domaine de définition** d'une fonction f est l'ensemble des x, où l'expression $f(x)$ est définie.
Note. Si on vous donne l'expression d'une fonction f, sans préciser l'ensemble de départ c'est à vous de déterminer le domaine de définition !

— Exemples : trouvons le domaine de définition des fonctions suivantes.

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty,-1[\, \cup\,]-1,+\infty[$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-4} \qquad \mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2,+2\}$$

$$f(x) = \sqrt{x^2-4} \qquad \mathcal{D}_f =]-\infty,-2] \,\cup\, [+2,+\infty[$$

Fonction polynôme

— Une **fonction monôme** est définie par $f(x) = x^k$ où $k \in \mathbb{N}$ est un entier.

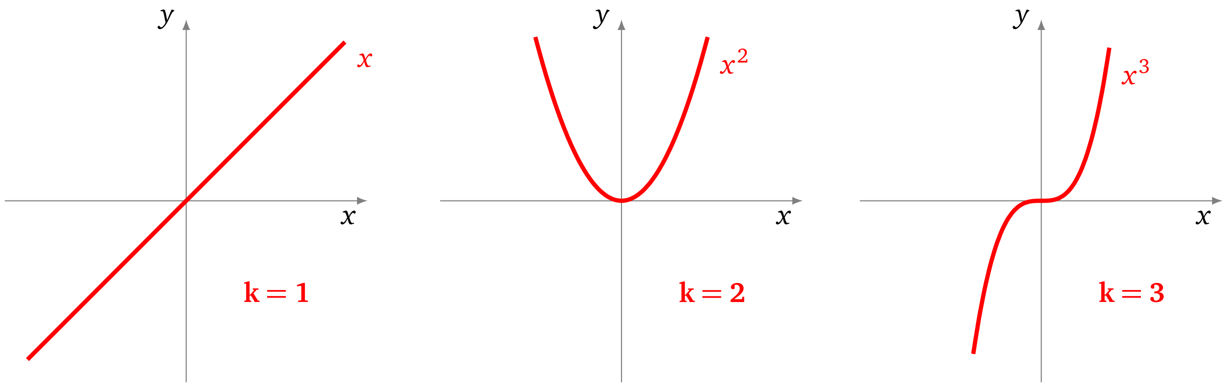
— Le domaine de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

— La dérivée est $\boxed{(x^k)' = kx^{k-1}}$.

— Les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont :

$$\lim_{x\to+\infty} x^k = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to-\infty} x^k = \begin{cases} +\infty & \text{si } k \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases}$$

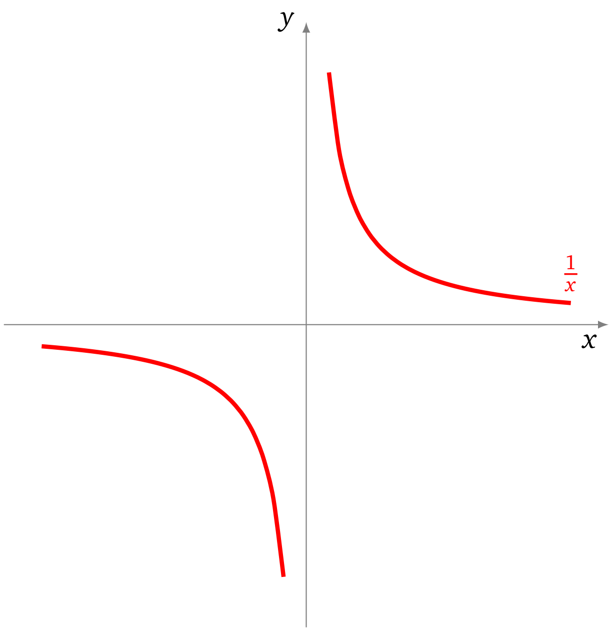
— Une **fonction polynôme** est une somme de fonctions monômes. Par exemple, les fonctions définies par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3 - 4x + 13$ sont des fonctions polynômes.



Fonction inverse

- La **fonction inverse** est définie par $f(x) = \frac{1}{x}$, notée aussi $f(x) = x^{-1}$.
- Le domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, car il est interdit de diviser par 0.
- La dérivée est $\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}}$.
- Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$$



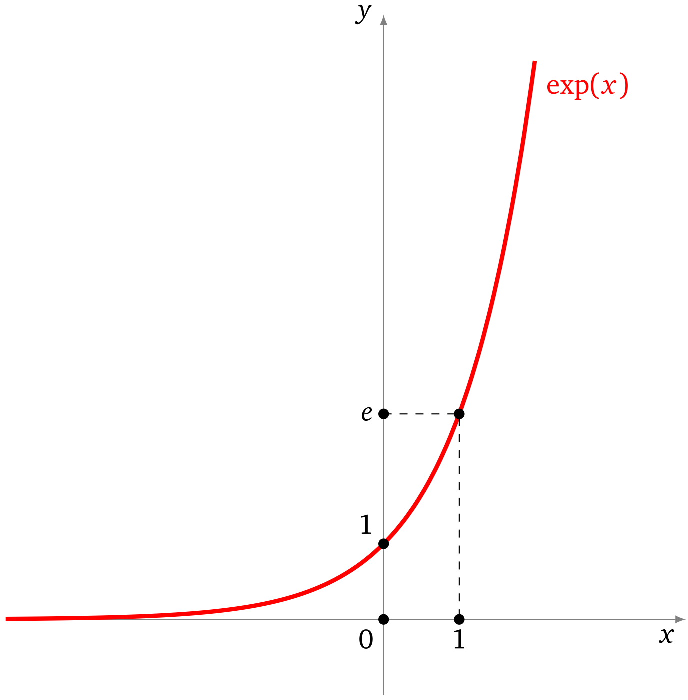
Fonction exponentielle

- La **fonction exponentielle** $f(x) = \exp(x)$ se note aussi par $f(x) = e^x$.
- Son domaine de définition est $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}$.
- On a $\exp(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- $\exp(0) = 1$, $\exp(1) = e \simeq 2.718$.
- La dérivée est la fonction elle-même : $\boxed{\exp'(x) = \exp(x)}$.
- Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

- Propriétés :

$$\boxed{e^{a+b} = e^a \cdot e^b} \qquad \boxed{(e^x)^\alpha = e^{\alpha x}} \qquad \boxed{(e^{-x}) = \frac{1}{e^x}}$$



Fonction logarithme

— Le **logarithme népérien** se note $f(x) = \ln(x)$.

— Son domaine de définition est $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$. Le logarithme n'est pas défini pour des x négatifs ou nuls.

— $\ln(1) = 0, \ \ln(e) = 1$.

— Propriétés :

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)} \qquad \boxed{\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)} \qquad \boxed{\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)}$$

— Le logarithme est la bijection réciproque de l'exponentielle :

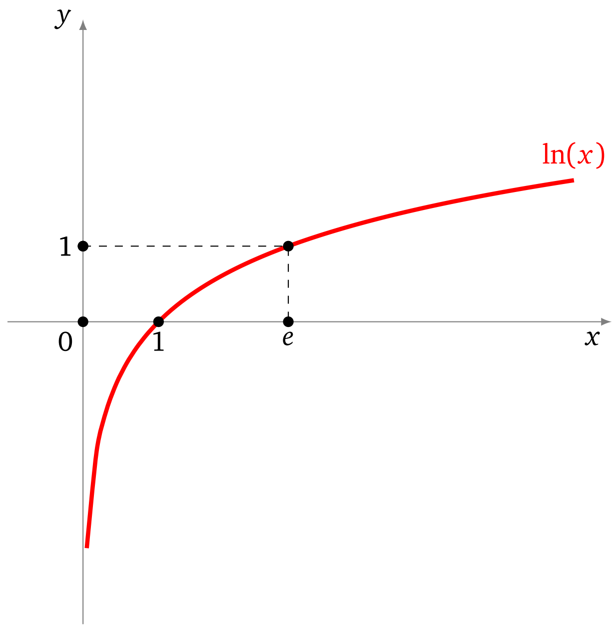
$$\boxed{\ln(\exp(x)) = x \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{\exp(\ln(x)) = x \qquad \text{pour tout } x > 0}$$

— La dérivée du logarithme est la fonction inverse $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$.

— Les limites de f sont :

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

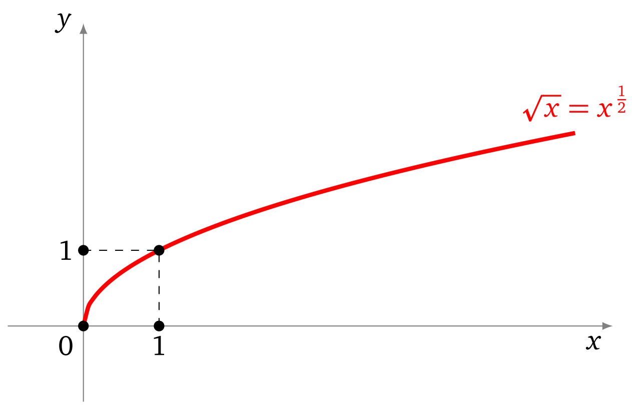


Fonctions puissances

- Les **fonctions puissances** $f(x) = x^\alpha$, avec $\alpha \in \mathbb{R}$ fixé, généralisent les fonctions polynômes (où l'exposant était un entier).
- Elles sont définies par :

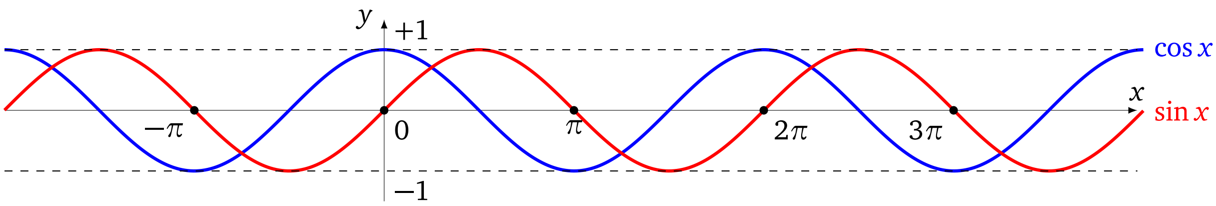
$$\boxed{x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}}$$

  Autrement dit $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$.
- Le domaine de définition est $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$.
- La dérivée est $\boxed{(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}}$.
- Exemple (carré) : $\alpha = 2$, on retrouve la fonction carrée $x^\alpha = e^{2\ln(x)} = (e^{\ln(x)})^2 = x^2$.
- Exemple (racine carrée) : $\alpha = \frac{1}{2}$, alors $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, qui vérifie bien sûr $(x^{\frac{1}{2}})^2 = x$.
- Exemple (racine cubique) : $\alpha = \frac{1}{3}$, alors $x^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{x}$, qui vérifie $(x^{\frac{1}{3}})^3 = x$.

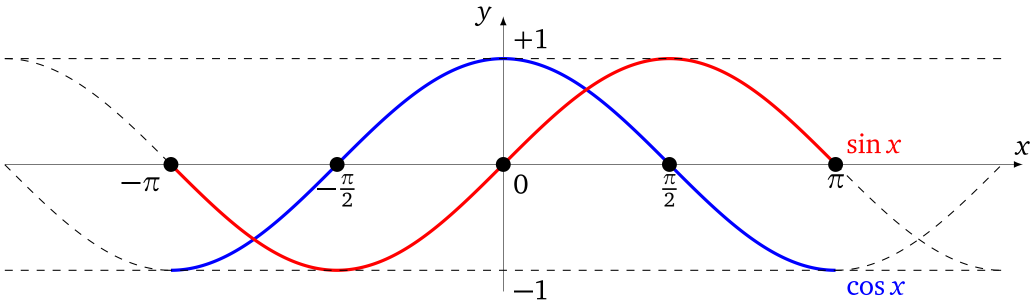


Sinus, cosinus, tangente

- Les fonctions **sinus** et **cosinus** sont définies sur $\mathbb{R}$.
- Les dérivée sont $\boxed{\sin'(x) = \cos(x)}$ et $\boxed{\cos'(x) = -\sin(x)}$.



Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.

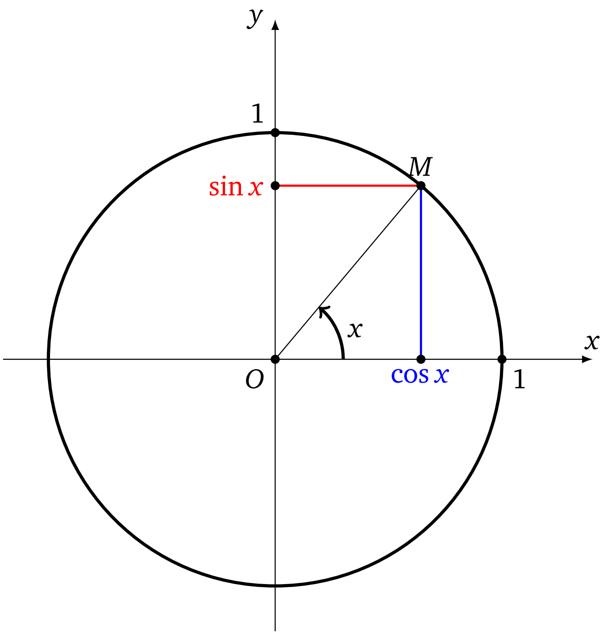


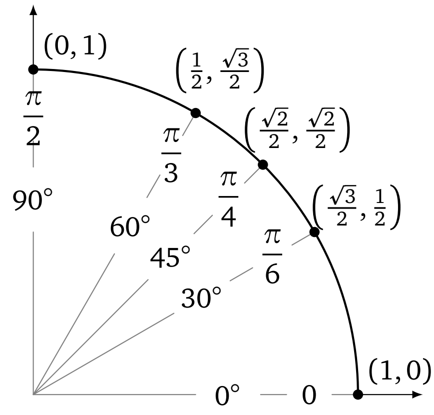
— La **tangente** est définie par $\boxed{\tan(x) = \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)}}$. Elle est définie si $\cos(x) \neq 0$, c'est-à-dire si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$). Sa dérivée peut s'écrire de deux façons différentes : $\boxed{\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)}$

Rappels de trigonométrie

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	


y
1
M
sin x
x
x
O
cos x
1


(0, 1)
$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{3}$
$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
$\frac{\pi}{4}$
90°
$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$
60°
$\frac{\pi}{6}$
45°
30°
(1, 0)
0°
0

Fiche 2. Dérivées

Savoir.

- ☐ Comprendre la définition de la dérivée en terme de limite.
- ☐ Connaître les formules de la dérivées d'une somme, d'un produit, d'un quotient.
- ☐ Connaître sur le bout de doigts les formules des dérivées usuelles.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer l'équation de la tangente au graphe d'une fonction.
- ☐ Savoir dériver les fonctions construites à partir de fonctions usuelles.
- ☐ En particulier savoir dériver les compositions de fonctions.

Définition

Le **nombre dérivé** d'une fonction f en x_0 est défini par une limite :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Une autre écriture de cette limite est :

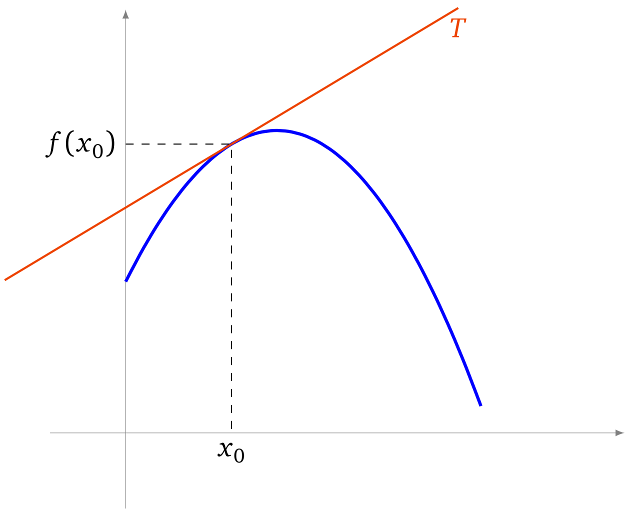
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Une autre notation pour $f'(x_0)$ est $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.
La **fonction dérivée** est $x \mapsto f'(x)$.

Tangente

La dérivée en x_0 est le coefficient directeur de la tangente au point $(x_0, f(x_0))$.
L'équation de cette tangente est :

$$\boxed{y = (x - x_0) f'(x_0) + f(x_0)}$$



Exemple : quelle est l'équation de la tangente au graphe de $f(x) = e^{2x}$ en $x_0 = 1$? On a $f'(x) = 2e^{2x}$, $f(x_0) = f(1) = e^2$, $f'(x_0) = f'(1) = 2e^2$. L'équation de la tangente est $y = (x-1)2e^2 + e^2$, ce qui s'écrit aussi $y = 2e^2 x - e^2$.

Opérations sur les dérivées

- **Somme.** $\boxed{(f+g)' = f' + g'}$
- **Produit par un réel.** $\boxed{(kf)' = kf' \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}}$
- **Produit.** $\boxed{(f \times g)' = f'g + fg'}$
- **Inverse.** $\boxed{\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}}$
- **Quotient.** $\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = xe^x + \ln(x)$. Il y a un produit (xe^x) et une somme. Ainsi :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (xe^x)' + (\ln(x))' \quad \text{(somme)} \\
&= (x)'e^x + x(e^x)' + \frac{1}{x} \quad \text{(produit et dérivée de ln)} \\
&= e^x + xe^x + \frac{1}{x} \quad \text{(dérivée de exp)} \\
&= (x+1)e^x + \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

Exemple. Calcul de la dérivée de $f(x) = \tan(x)$. Par définition $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$. Il s'agit de dériver un quotient.

$$\begin{aligned}
\tan'(x) &= \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' \\
&= \frac{\cos(x)\cos(x) - \sin(x)(-\sin(x))}{(\cos(x))^2} \\
&= \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)}
\end{aligned}$$

On a utilisé l'égalité $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. En repartant de l'avant-dernière égalité on a aussi :

$$\tan'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)}{\cos^2(x)} + \frac{\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

Formules

Les dérivées des fonctions classiques (à gauche) et les formules pour la composition (à droite, où u est une fonction qui dépend de x).

Fonction	**Dérivée**
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	**Dérivée**
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Exemples.

— $F(x) = \ln(x^2)$ alors en posant $u = x^2$ (et donc $u' = 2x$), on a $F(x) = \ln(u)$ et donc $F'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}$.

— $F(x) = \exp(\frac{1}{x})$ alors en posant $u = \frac{1}{x}$ (et donc $u' = -\frac{1}{x^2}$), on a $F(x) = \exp(u)$ et donc $F'(x) = u'\exp(u) = -\frac{1}{x^2}\exp(\frac{1}{x})$.

— $F(x) = \sqrt{\ln(x)}$ alors en posant $u = \ln(x)$ (et donc $u' = \frac{1}{x}$), on a $F(x) = \sqrt{u}$ et donc $F'(x) = \frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}} = \frac{1}{2}\frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{\ln(x)}}$.

Fiche 3. Limites

Savoir.

- ☐ Connaître les limites des fonctions usuelles.
- ☐ Connaître les opérations sur les limites.

Savoir-faire.

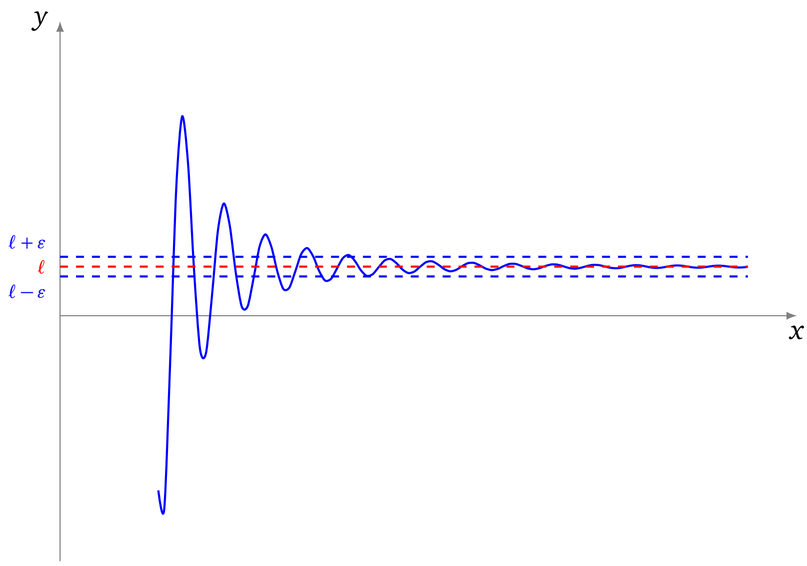
- ☐ Savoir déterminer la limite en un réel a, en $+\infty$ ou en $-\infty$ d'une fonction donnée.
- ☐ Savoir appliquer les différentes méthodes de calcul de limites.
- ☐ Savoir lever une indétermination.

La notion de limite permet d'étudier le comportement d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en un point, en $-\infty$ ou $+\infty$.

Notion de limite en $+\infty$

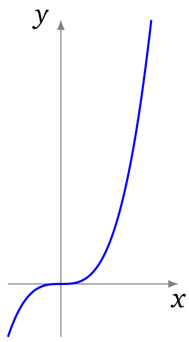
Limite finie en $+\infty$

Soit ℓ un réel. Si tout intervalle ouvert $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand alors on dit que f tend vers ℓ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} \ell$.

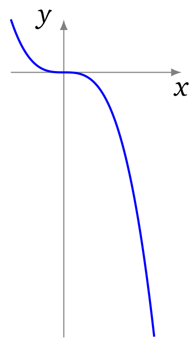


Limite infinie en $+\infty$

- Si tout intervalle $[M, +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand alors on dit que f tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.
- Si tout intervalle $]-\infty, M]$ avec $M \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment grand alors on dit que f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$

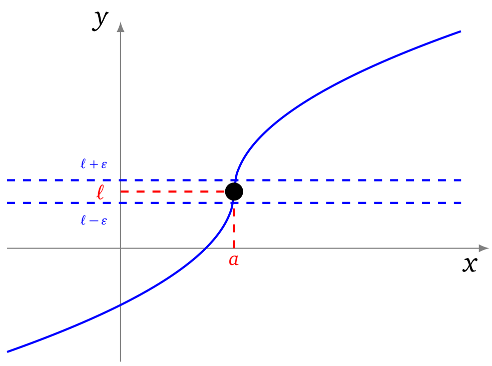
Remarque

- Une fonction f n'admet pas obligatoirement de limite en $+\infty$. Par exemple, les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite que ce soit en $+\infty$ ou en $-\infty$.
- La notion de limite en $-\infty$ ne sera pas explicitée, elle est similaire à celle en $+\infty$.

Notion de limite en un réel a

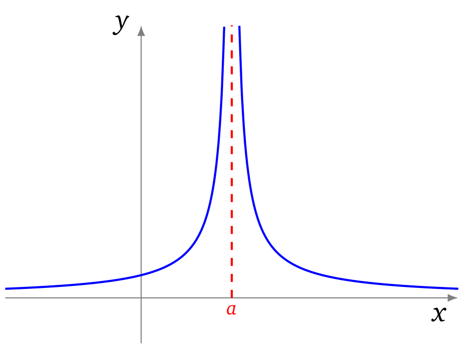
Limite finie en a

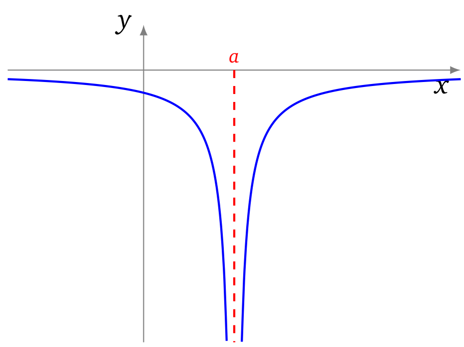
Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si tout intervalle ouvert $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a alors on dit que f tend vers ℓ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.



Limite infinie en a

- Si tout intervalle $[M, +\infty[$ avec $M \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a alors on dit que f tend vers $+\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.
- Si tout intervalle $]-\infty, M]$ avec $M \in \mathbb{R}$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a alors on dit que f tend vers $-\infty$ en a et on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.



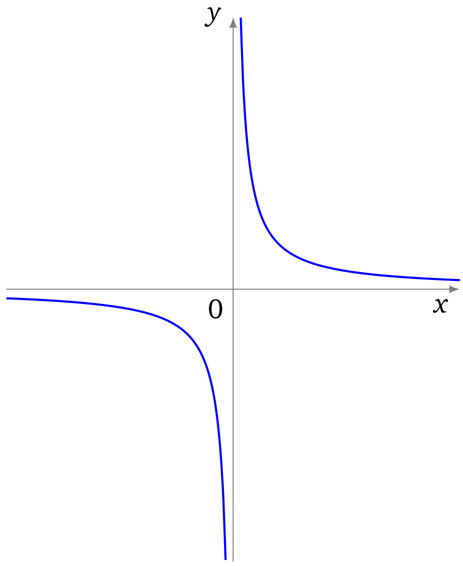


Limite à gauche, limite à droite en a

— Pour définir la notion de limite à gauche en a, on remplace la locution "x suffisamment proche de a" de la définition par "x suffisamment proche de a avec $x < a$". La notation devient $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$.

— Pour définir la notion de limite à droite en a, on remplace la locution "x suffisamment proche de a" de la définition par "x suffisamment proche de a avec $x > a$". La notation devient $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$.

L'étude de la fonction inverse est un exemple montrant l'importance de la notion de limite à gauche et de limite à droite. En effet, la limite en 0 n'existe pas mais $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.



Opérations sur les limites

Lorsque l'on connaît la limite de deux fonctions f et g en un point ou en l'infini, que se passe-t-il pour kf (avec k un réel), $f+g$, $f-g$, $f \times g$, $\frac{f}{g}$ (si cela existe), $f \circ g$ (composée de g par f si cela existe) ? Toutes ces opérations sont naturelles, à l'exception notable des formes indéterminées (notées FI).

Limite d'une somme de fonctions

$$\boxed{\text{Si } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \text{ alors } f(x)+g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell + \ell'.}$$

Cette formule est encore valable si on se place en $a = +\infty$ (ou $a = -\infty$).
Ces formules sont aussi valables dans certains cas pour $\ell = +\infty$ ou $\ell' = +\infty$ en utilisant les conventions :

$$\ell + \infty = +\infty \qquad +\infty + \infty = +\infty$$

Exemple. $f(x) = \exp(x)$ et $g(x) = x^2 - 1$. On a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) + g(x) = +\infty$. On a aussi $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) - g(x) = -\infty$.
Par contre si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} +\infty$ et $g(x) \xrightarrow[x \to a]{} -\infty$, alors il s'agit d'une forme indéterminée "$+\infty - \infty$". On ne peut rien dire sur la limite de $f+g$. Il faut étudier la situation à la main sur chaque exemple.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x)+g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite d'un produit de fonctions

$$\boxed{\text{Si } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \text{ et } g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell' \text{ alors } f(x) \times g(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \times \ell'.}$$

Ces formules s'étendent dans certains cas pour $\ell = +\infty$ ou $\ell' = +\infty$ en utilisant les conventions :

$$(+\infty) \times (+\infty) = +\infty \qquad (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \qquad (+\infty) \times (-\infty) = -\infty$$
$$\ell \times (+\infty) = +\infty \text{ si } \ell > 0 \qquad \ell \times (+\infty) = -\infty \text{ si } \ell < 0$$

Par contre "$0 \times (+\infty)$" est une forme indéterminée à étudier au cas par cas.

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x \to a} f(x) \times g(x) =$	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Limite de l'inverse d'une fonction

$$\boxed{\text{Si } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell \text{ avec } \ell \neq 0 \text{ alors et } \frac{1}{f(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{1}{\ell}.}$$

La forme "$\frac{1}{0}$" est indéterminée, mais par contre on peut dire "$\frac{1}{0^+} = +\infty$" et "$\frac{1}{0^-} = -\infty$".

$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim\limits_{x \to a} \frac{1}{f(x)}$	$\frac{1}{\ell}$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$

Pour une fraction $\frac{f}{g}$ on écrit $\dfrac{f(x)}{g(x)} = f(x) \times \dfrac{1}{g(x)}$.

Limite d'une composée de fonctions

$$\boxed{\text{Si } f(x) \xrightarrow[x \to a]{} b \text{ et } g(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell \text{ alors } g\big(f(x)\big) \xrightarrow[x \to a]{} \ell.}$$

Exemple. On cherche à déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)$.

— Pour tout $x > 0$ on a :
$$\frac{x}{x^2+1} = \frac{x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right).$$

— On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 + \dfrac{1}{x^2} = 1$. Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}\left(1 + \dfrac{1}{x^2}\right) = 0$. D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2+1} = 0$.

— On sait que $\lim\limits_{y \to 0} \ln(y) = -\infty$.

Ainsi, par le théorème de composition, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = -\infty$.

Comment lever une indétermination ?

Les opérations sur les limites ne permettent pas de conclure dans tous les cas. Il existe des formes indéterminées. Les plus courantes sont du type :

$$+\infty - \infty \qquad 0 \times (+\infty) \qquad \frac{0}{0} \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

Dans ce cas, il faut lever l'indétermination. Pour cela, il existe différentes méthodes que nous expliquerons par des exemples.

Factorisation

— Considérons la fonction polynomiale définie par $f(x) = -3x^6 - 7x^5 + x + 12$. On cherche à déterminer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. Pour cela, on factorise par le monôme de plus haut degré. Ici il s'agit du monôme $-3x^6$. Pour $x < 0$ on a donc :

$$f(x) = -3x^6 - 7x^5 + x + 12 = -3x^6\left(1 - \frac{7x^5}{-3x^6} + \frac{x}{-3x^6} + \frac{12}{-3x^6}\right) = -3x^6\left(1 + \frac{7}{3x} - \frac{1}{3x^5} - \frac{4}{x^6}\right).$$

Or $\lim_{x\to-\infty} \frac{7}{3x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{3x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^6} = 0$, donc la fonction dans la parenthèse tend vers 1 et comme $\lim_{x\to-\infty} -3x^6 = -\infty$, on obtient

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

— On considère la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + 1}$. On cherche à déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. On a une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. Pour lever l'indétermination, on factorise au numérateur et au dénominateur par le terme qui croit le plus vite en valeur absolue. Dans notre cas, on factorise le numérateur par x^3 et le dénominateur par x^2. Ainsi, pour $x > 0$, on a :

$$f(x) = \frac{x^3 + \sqrt{x}}{x^2 + 1} = \frac{x^3\left(1 + \frac{\sqrt{x}}{x^3}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = x\frac{1 + \frac{\sqrt{x}}{x^3}}{1 + \frac{1}{x^2}} = x\frac{1 + x^{-\frac{5}{2}}}{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

Or $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}}{x^3} = \lim_{x\to+\infty} x^{-\frac{5}{2}} = 0$. Donc $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1 + x^{-\frac{5}{2}}}{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Utilisation de l'expression conjuguée

À partir de l'identité remarque $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, on déduit que $(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b}) = a - b$. Considérons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x}$. On cherche à déterminer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$. Nous utilisons la quantité conjuguée de $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$, qui est $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$. Ainsi, pour $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} \times \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} \\ &= \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{x + 1 - x}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} = \frac{1}{x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}. \end{aligned}$$

Or $\lim_{x\to+\infty} x(\sqrt{x+1} + \sqrt{x}) = +\infty$. Donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x}}{x} = 0$.

Utilisation de la définition de la dérivée

Considérons la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\cos(x) - 1}{x}$. On veut déterminer $\lim_{x\to 0} f(x)$. Pour cela, on pose $g(x) = \cos(x)$. La fonction cosinus est dérivable en 0 et, par définition, $g'(0) = \lim_{x\to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0}$. Or $g(0) = \cos(0) = 1$. Donc

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = g'(0)$$

Il ne reste plus qu'à calculer $g'(0)$ à l'aide de g'. On sait que $g'(x) = -\sin(x)$ pour tour réel x. Ainsi $g'(0) = -\sin(0) = 0$. On obtient finalement que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$.

En exercice, calculez $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ et $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Règle de l'Hôpital

> Soient f et g deux fonctions définies et dérivables avec :
> $$f(a)=0 \quad g(a)=0 \quad \text{et} \quad g'(a)\neq 0.$$
> $$\text{Alors:} \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Exemple. Considérons la fonction définie par $h(x)=\dfrac{x^3-1}{x-1}$. On veut déterminer $\lim\limits_{x\to 1}h(x)$. On pose $f(x)=x^3-1$ et $g(x)=x-1$. Ces deux fonctions sont définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ car ce sont des fonctions polynomiales. De plus, $f(1)=g(1)=0$, $g'(x)=3x$, $g'(1)=3\neq 0$, $f'(x)=1$ et $f'(1)=1$. Alors, en utilisant la règle de l'Hôpital, on a : $\lim\limits_{x\to 1}h(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f'(1)}{g'(1)}=3$.

Exercice. Calculer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}$.

Croissances comparées

Ce sont des situations où l'on peut lever l'indétermination car une fonction "l'emporte" sur l'autre. Par exemple le comportement de l'exponentielle l'emporte sur le comportement d'une fonction polynôme, qui elle l'emporte sur le logarithme.

> a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^k}=+\infty$
>
> b) $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}|x|^k e^x=0$
>
> c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x^k}=0$
>
> d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}x^k\ln(x)=0$
>
> où $k>0$ est un entier ou un réel

Exemple. Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$. Soit $x>0$. On a $x^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\dfrac{1}{x}\ln(x)\right)$. Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(x)=0$. On sait que $\lim\limits_{x\to 0}\exp(x)=1$. Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}=1$.

Une fonction croissante et majorée admet une limite

Proposition. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante et majorée (c'est-à-dire il existe $M>0$ tel que $f(x)<M$ pour tout $x\in\mathbb{R}$) alors f admet une limite $\ell\in\mathbb{R}$ lorsque $x\to+\infty$. De même une fonction décroissante et minorée admet une limite en $+\infty$.

Exemple. Soit $f(x)=\cos(\frac{1}{x})+\frac{1}{x}$ définie sur $[1,+\infty[$. On sait $-1\leqslant\cos(\frac{1}{x})\leqslant 1$ et $0\leqslant\frac{1}{x}\leqslant 1$ pour tout $x\in[1+\infty[$. Alors $-1\leqslant f(x)\leqslant 2$ pour tout $x\in[1+\infty[$. En plus

$$f'(x)=\frac{\sin(\frac{1}{x})-1}{x^2}\leqslant 0$$

donc f est décroissante et minorée par -1, donc f admet une limite ℓ en $+\infty$. La proposition ne donne pas la valeur de la limite (en fait ici $\ell=1$).

Fiche 4. Étude de fonctions

Savoir.

- ☐ Connaître les différentes étapes d'une étude de fonction.
- ☐ Connaître ses formules : fonctions usuelles, dérivées, limites.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir faire une étude complète de fonction.
- ☐ Savoir tracer le graphe d'une fonction.
- ☐ Savoir calculer les asymptotes.

On considère la fonction f définie par l'expression $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$. Cet exemple servira de modèle pour expliquer comment réaliser une étude de fonction.
Les différentes étapes sont les suivantes (qu'il faudra éventuellement adapter selon la fonction).

1. Domaine de définition
2. Calcul de la dérivée
3. Calcul des limites
4. Sens de variation
5. Tableau de variations
6. Représentation graphique
7. Asymptotes

1. Domaine de définition

Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de f c'est répondre à la question : "Pour quels réels x l'expression $f(x)$ a-t-elle un sens ?"

— On sait que la fraction $\dfrac{x^2+1}{x}$ est définie pour $x \in \mathbb{R}^*$ ($\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$).

— On sait que la fonction logarithme est définie sur $\mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

Il suffit donc de déterminer les réels non nuls x tels que $\frac{x^2+1}{x} > 0$. Mais, comme $x^2 + 1 > 0$, cela équivaut à $x > 0$ et donc $\mathscr{D}_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.

2. Calcul des limites

Pour une fonction f donnée, on détermine ses limites sur la frontière de son ensemble de définition.

Dans notre exemple $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$, on a montré que $\mathscr{D}_f =]0, +\infty[$. Ainsi, nous allons déterminer les limites de f en 0 (à droite) et en $+\infty$.

Limite à droite en 0.

— On sait que $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2 + 1 = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2+1}{x} = +\infty$.

— On sait que $\lim\limits_{y\to +\infty} \ln(y) = +\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right) = +\infty$.

Limite en $+\infty$.

— Pour tout $x>0$ on a :

$$\frac{x^2+1}{x}=\frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}=x\left(1+\frac{1}{x^2}\right).$$

— On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}1+\dfrac{1}{x^2}=1$. D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+1}{x}=+\infty$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)=+\infty$.

3. Calcul de la dérivée

La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, calculons sa dérivée f'.

— On sait que f est de la forme $f(x)=\ln(u(x))$ avec $u(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$. Donc, pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

— On sait que u est de la forme $u(x)=\dfrac{v(x)}{w(x)}$ avec $v(x)=x^2+1$ et $w(x)=x$. Donc, pour tout $x>0$, on a : $u'(x)=\dfrac{v'(x)w(x)-v(x)w'(x)}{(w(x))^2}$.

— On sait que $v'(x)=2x$ et $w'(x)=1$. Ainsi, $u'(x)=\dfrac{2x^2-(x^2+1)}{x^2}=\dfrac{x^2-1}{x^2}$.

On peut donc conclure que, pour tout $x>0$, on a :

$$f'(x)=\frac{\frac{x^2-1}{x^2}}{\frac{x^2+1}{x}}=\frac{x^2-1}{x^2}\times\frac{x}{x^2+1}=\frac{x^2-1}{x(x^2+1)}.$$

4. Sens de variation

Le signe de la dérivée d'une fonction permet de déterminer son sens de variation.

Rappel. Soit I un intervalle et $f:I\to\mathbb{R}$ une fonction dérivable.

a) Si $f'(x)>0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement croissante sur I.

b) Si $f'(x)<0$ pour tout $x\in I$ alors f est strictement décroissante sur I.

c) Si $f'(x)=0$ pour tout $x\in I$ alors f est constante sur I.

Dans notre exemple, commençons par déterminer le signe de f'. On sait que, pour tout $x>0$, on a : $f'(x)=\dfrac{x^2-1}{x(x^2+1)}$. Or, pour tout $x>0$, on a $x(x^2+1)>0$. Ainsi, le signe de f' ne dépend que de celui de x^2-1 pour $x\in\mathbb{R}_+^*$.

Déterminons le signe de x^2-1 : comme $x^2-1=(x-1)(x+1)$ (nous utilisons l'identité remarquable $a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ avec $a=x$ et $b=1$) alors $x^2-1<0$ pour tout $x\in]-1,1[$ et $x^2-1>0$ pour tout $x\in]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[$. Ainsi,

— on obtient : $f'(x)<0$ pour tout $x\in]0,1[$,

— on obtient : $f'(x)>0$ pour tout $x\in]1,+\infty[$,

— et $f'(1)=0$.

D'où :

— La fonction f est strictement décroissante sur $]0,1[$,

— La fonction f est strictement croissante sur $]1,+\infty[$.

— le graphe de la fonction f admet une tangente horizontale en 1.

5. Tableau de variations

Le tableau de variations permet de récapituler toutes les informations précédemment trouvées sur la fonction à étudier.

Dans le cas de la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$, voici le tableau de variations que l'on obtient.

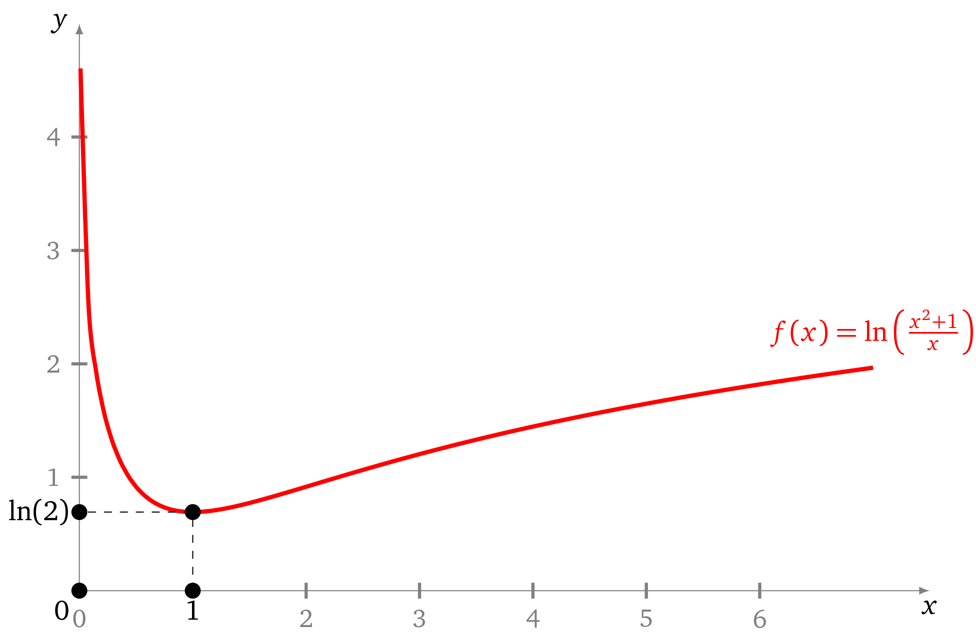
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$\ln(2)$	↗	$+\infty$

On obtient également que f admet un minimum local, qui est ici global, en $x = 1$. Ce minimum global vaut $f(1) = \ln\left(\dfrac{1^2+1}{1}\right) = \ln(2)$.

6. Représentation graphique

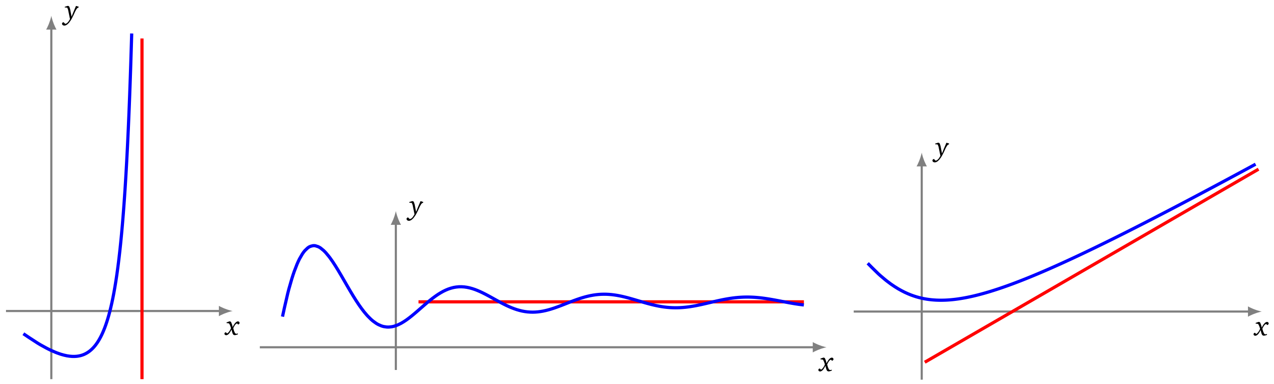
Le graphe d'une fonction est obtenu à partir des informations contenues dans le tableau de variation et du calcul de quelques valeurs.

Voici la représentation graphique de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)$.



7. Asymptotes

De gauche à droite : asymptote verticale, horizontale, oblique.



— **Asymptote verticale.** Si, quand x tend vers a, $f(x)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) la droite d'équation $x = a$ est *asymptote verticale* au graphe de f.

— **Asymptote horizontale.** Si, quand x tend vers $+\infty$, $f(x)$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$, la droite d'équation $y = \ell$ est *asymptote horizontale* au graphe de f.

— **Asymptote oblique.** La droite d'équation $y = ax + b$ est *asymptote oblique* au graphe de f :

  a) si $\frac{f(x)}{x}$ tend vers un réel a,

  b) et si $f(x) - ax$ tend vers un réel b.

Pour l'exemple utilisé dans cette fiche, le graphe de f admet une asymptote verticale en 0^+. Des exemples d'asymptotes obliques seront faits en exercices.

Fiche 5. Équations différentielles 1

Savoir.

- ☐ Comprendre ce qu'est une équation différentielle.
- ☐ Savoir expliquer les termes d'une équation différentielle à partir des notions d'effectif, de taux de croissance ou de proportionnalité.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir déterminer les solutions constantes d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir trouver l'équation différentielle associée à une situation décrite par un texte.

Vidéo ■ Fiche 5.a. Équations différentielles
Vidéo ■ Fiche 5.b. Équations différentielles (suite)

Nous nous intéressons à des équations où l'inconnue à trouver n'est pas un nombre mais une fonction. Par exemple, considérons l'équation $f'(x) = f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On cherche toutes les fonctions f possibles satisfaisant cette équation. Vous en connaissez au moins une. Laquelle ? La fonction exponentielle ! Il existe d'autres solutions. En fait, les solutions de cette équation sont les fonctions de la forme $f(x) = ke^x$ où k est une constante réelle.

Définition d'une équation différentielle

On appelle **équation différentielle** toute équation, d'inconnue une fonction f, mettant en relation f et f' (et éventuellement les dérivées successives f'', f''', ...).

Exemples. Les équations suivantes sont des exemples d'équations différentielles :

$$f'(x) = e^x f(x) + x,$$
$$f''(x) = -f'(x) + 2,$$
$$f(x)f'(x) = -\ln(f(x)).$$

Notation. Il faut s'habituer aux notations variées pour une équation différentielle. Voici différentes notations de la même équations :

$f'(x) = -f(x)$ (fonction inconnue f de variable x),

$y'(x) = -y(x)$ (fonction inconnue y de variable x),

$y'(t) = -y(t)$ (fonction inconnue y de variable t),

$y' = -y$ (fonction inconnue y, le nom de la variable n'est pas spécifié).

Exercice. Trouver/deviner une solution (ou mieux plusieurs) des équations différentielles suivantes :

$$y'(x) = -y(x)$$
$$y'(x) = \sin(2x)$$
$$y'(x) = 3y(x)$$
$$y''(x) = y(x)$$

Solutions particulières – Solutions constantes

Résoudre une équation différentielle c'est trouver toutes les fonctions qui satisfont l'équation. En général, c'est un problème très difficile, voir impossible.
Nous nous placerons dans deux situations plus simples :

— vérifier qu'une fonction donnée est bien solution de l'équation différentielle,

— déterminer les solutions constantes d'une équation différentielle.

Exemple 1

$$y'(x) = 2xy(x) + 4x \tag{1}$$

Vérifier que $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est solution (quel que soit $k \in \mathbb{R}$).
Si $y(x) = k\exp(x^2) - 2$, alors par dérivation $y'(x) = 2kx\exp(x^2)$. Mais d'autre part $2xy(x) + 4x = (2kx\exp(x^2) - 4x) + 4x = 2kx\exp(x^2)$ et donc $2xy(x) + 4x = y'(x)$. Ainsi $y(x) = k\exp(x^2) - 2$ est bien solution de l'équation différentielle (**??**).

Exemple 2 On considère l'équation différentielle

$$y''(x) - y'(x) = 2y(x) \tag{2}$$

Vérifier que $y(x) = 3e^{-x} + \sqrt{2}e^{2x}$ solution de l'équation différentielle (**??**), pour cela :

— calculer que $y'(x) = -3e^{-x} + 2\sqrt{2}e^{2x}$,

— calculer que $y''(x) = 3e^{-x} + 4\sqrt{2}e^{2x}$,

— conclure.

Exemple 3 On considère l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)^3 + 2y(x)^2 - 3y(x) \tag{3}$$

Déterminons les solutions constantes de cette équation différentielle. Pour cela, rappelons les points suivants :

— Une fonction définie et dérivable sur un intervalle I est constante si et seulement si sa dérivée est nulle sur I.

— Pour connaître une fonction f constante sur un intervalle I, il suffit de la connaître la valeur en un point $x_0 \in I$.

Ainsi pour déterminer les solutions constantes de (**??**), il suffit de résoudre l'équation réelle (équation dont l'inconnue est un réel que nous noterons c)

$$0 = c^3 + 2c^2 - 3c. \tag{4}$$

On a $c^3 + 2c^2 - 3c = c(c^2 + 2c - 3)$. Donc $c^3 + 2c^2 - 3c = 0 \iff c = 0$ ou $c^2 + 2c - 3 = 0$. Il reste à résoudre $c^2 + 2c - 3 = 0$ c'est-à-dire trouver les racines d'un trinôme du second degré. Les réels -3 et 1 sont racines évidentes. Ainsi $c^3 + 2c^2 - 3c = 0 \iff c = 0$ ou $c = -3$ ou $c = 1$. Au final, l'équation différentielle (**??**) possède trois solutions constantes : $y_1(x) = -3$, $y_2(x) = 0$ et $y_3(x) = 1$.

Modélisation

Le concept d'équation différentielle intervient dans de nombreux domaines scientifiques. Entre autres, elles interviennent dans les domaines suivants :

— En biologie avec l'étude d'une population (comme la population de micro-organismes) où l'on connaît des règles pour décrire sa croissance (comme le taux de natalité/mortalité).

— En physique avec la loi fondamentale de la mécanique qui relie l'accélération à la somme des forces. Cela conduit à une équation différentielle car l'accélération est la dérivée seconde de la position.

— En radioactivité avec l'étude de la désintégration de noyaux radioactifs et le calcul de la demi-vie radioactive.

Ce sera parfois à vous de trouver l'équation différentielle en fonction de l'énoncé avant d'avoir à la résoudre. Voici deux exemples.

Exemple 1. "*On étudie la population de chenilles qui s'est introduite dans un groupe d'arbres. On note $N(t)$ le nombre de chenilles au cours du temps. Des mesures effectuées montrent que le taux de croissance des chenilles au temps t est de* 4% *de la population.*"
Ce texte signifie que la variation du nombre de chenilles au temps t (c'est-à-dire la dérivée du nombre de chenilles au temps t, donc $N'(t)$) est proportionnelle à l'effectif des chenilles au temps t (c'est-à-dire proportionnelle à $N(t)$) et que le coefficient de proportionnalité vaut 0.04 (la population croît donc le coefficient est positif).
L'équation différentielle associée au problème est donc :

$$N'(t) = 0.04\, N(t).$$

Exemple 2. "*On considère une population de renards roux. Une maladie décime les proies et les renards ne peuvent plus s'alimenter. On estime que le taux de décroissance des renards est de* 5% *de la population à chaque instant t.*"
Notons $R(t)$ l'effectif des renards au temps t. D'après le texte, $R'(t)$ est proportionnelle à $R(t)$ et le coefficient de proportionnalité est -0.05 (le coefficient est négatif car la population décroît).
L'équation différentielle associée au problème est donc :

$$R'(t) = -0.05\, R(t).$$

Fiche 6. Équations différentielles 2

Savoir.

- ☐ Comprendre ce qu'est une condition initiale d'une équation différentielle.
- ☐ Savoir qu'un condition initiale entraîne l'unicité de la solution.
- ☐ Savoir interpréter l'unicité en terme des courbes solutions qui ne s'intersectent pas.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir résoudre une équation différentielle avec condition initiale.
- ☐ Savoir obtenir des informations sur une solution sous la condition que les courbes des solutions ne s'intersectent pas.

`Vidéo ■ Fiche 6. Équations différentielles (fin)`

Un exemple

Une équation différentielle a en général une infinité de fonctions solutions.
Considérons par exemple l'équation différentielle :

$$y'(x) = y(x) \tag{1}$$

Alors les solutions de (**??**) sont les fonctions :

$$y(x) = ke^x \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, chaque valeur de la constante k fournit une fonction solution : par exemple pour $k = 1$, $y_1(x) = e^x$ est solution, pour $k = -2$, $y_{-2}(x) = -2e^x$ est solution, pour $k = 0$, $y_0(x) = 0$ est solution...
Pour n'avoir qu'une seule solution, il faut imposer une condition initiale

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) & \text{équation différentielle} \\ y(0) = 3 & \text{condition initiale} \end{cases} \tag{2}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y(x) = ke^x$, mais on veut $y(0) = 3$. Comme $y(0) = ke^0 = k$, on doit avoir $k = 3$. Ainsi l'unique solution du problème (**??**) est la fonction $y(x) = 3e^x$.
Exercice. Considérons l'équation différentielle avec condition initiale :

$$\begin{cases} y'(x) = y(x) \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{3}$$

Trouver l'unique solution de ce problème. (Attention ce n'est pas $y(x) = 2e^x$!)

Condition initiale

Définition

Pour une équation différentielle dite d'ordre 1, faisant intervenir y et y', une **condition initiale** est du type :

$$y(x_0) = y_0$$

où $x_0 \in \mathbb{R}$ et $y_0 \in \mathbb{R}$ sont des constantes.
Exemple.

$$y'(x) = -y(x)^2 + 3y(x) - 2 \quad \text{et} \quad y(0) = 10$$

Le système formé par une équation différentielle (E) et une condition initiale est appelé **problème de Cauchy**.
Pour une équation différentielle dite d'ordre 2, faisant intervenir y, y' et y'', une **condition initiale** est du type :

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y_1 \end{cases}$$

Exemple.

$$y''(x) = -y'(x) + 2y(x) \quad \text{avec} \quad y(0) = 0 \;\text{ et }\; y'(0) = 1$$

Théorème d'unicité

Pour les problème que l'on rencontrera on admettra le théorème de Cauchy :

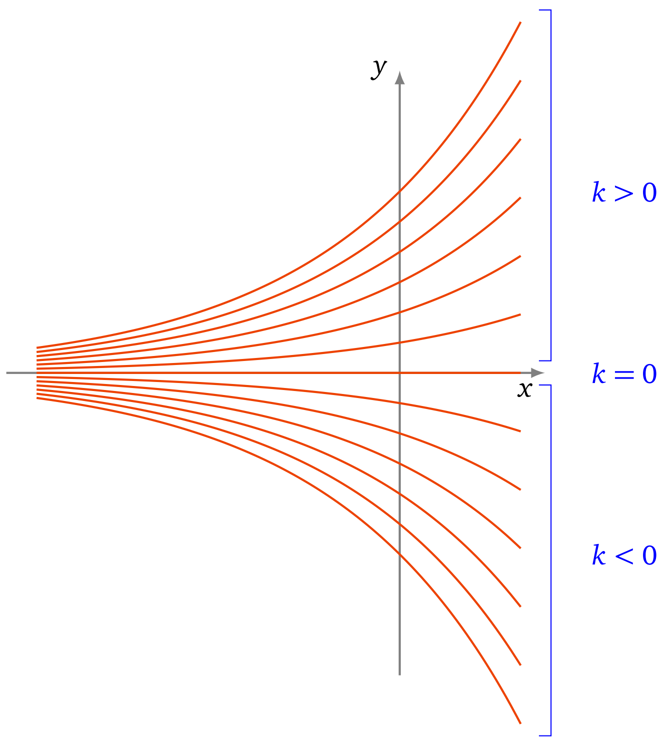
« Une équation différentielle avec condition initiale admet une unique solution. »

Courbes solutions

Une **courbe solution** d'une équation différentielle (E) est le graphe d'une solution de (E).
Pour l'équation différentielle

$$y'(x) = y(x)$$

on sait que les solution sont les $y(x) = ke^x$, où $k \in \mathbb{R}$ est une constante. Ci-dessous sont tracés quelques graphes de ces solutions.



Le théorème de Cauchy pour les équations différentielles linéaires se reformule ainsi :

« Par chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ passe une et une seule courbe solution. »

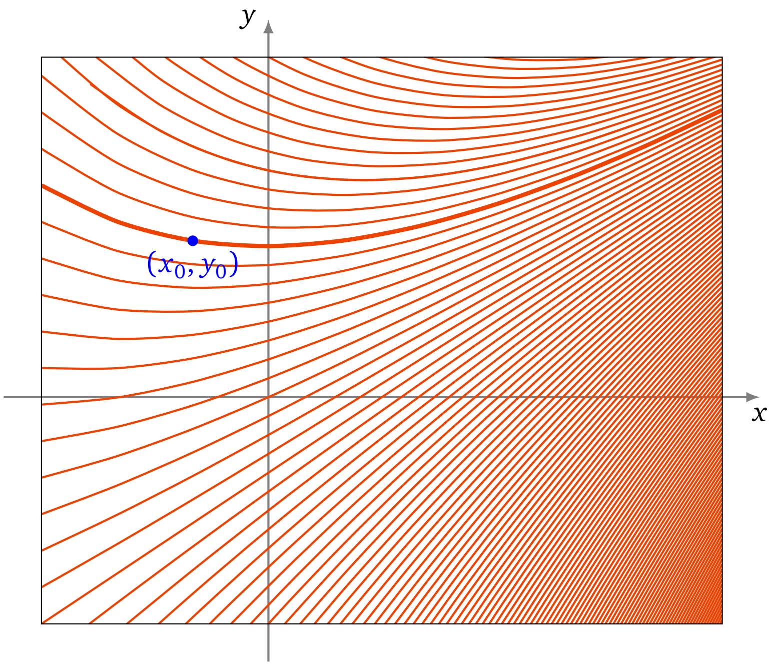
En particulier :

« Deux courbes solutions ne s'intersectent pas. »

Exemple. Les solutions de l'équation différentielle $y' + y = x$ sont les

$$y(x) = x - 1 + ke^{-x} \quad k \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$. Le graphe de cette solution est la courbe intégrale passant par (x_0, y_0).



Variations des solutions

L'équation différentielle permet parfois d'avoir des informations sur la fonctions f avant même de connaître exactement la solution.
Par exemple, considérons :

$$y'(x) = y^2(x) + 1$$

Alors, sans résoudre cette équation, on sait qu'une solution vérifiera $y'(x) \geqslant 0$, donc une solution $y(x)$ est une fonction croissante.
Autre exemple, avec :

$$y'(x) = xe^{y(x)}$$

Si $x \leqslant 0$ alors $xe^{y(x)} \leqslant 0$ donc une solution vérifiera $y'(x) \leqslant 0$, et la solution $y(x)$ est une fonction décroissante sur $]-\infty, 0]$. Par contre Si $x \geqslant 0$ alors $xe^{y(x)} \geqslant 0$ donc une solution vérifiera $y'(x) \geqslant 0$, et la fonction $y(x)$ est croissante sur $[0, +\infty[$.

Équation à variables séparées

Une **équation différentielle à variable séparées** est de la forme :

$$y'(x) = \frac{a(x)}{b(y)}$$

Ce nom est justifié car on peut mettre tous les x d'un côté et tous les y de l'autre :

$$b(y)y' = a(x)$$

Voici la méthode pour résoudre ce type d'équation.
Exemple.

$$x^2 y'(x) = e^{-y(x)}$$

— On sépare les variables x des variables y :

$$y'(x)e^{y(x)} = \frac{1}{x^2}$$

— On intègre chacun des côtés :

$$e^{y(x)} = -\frac{1}{x} + c$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

— On exprime la solution :

$$y(x) = \ln\left(-\frac{1}{x} + c\right)$$

Autres exemples.

$$y'y^2 = x \qquad y' = y\ln(x) \qquad y' = \frac{1}{y^n}$$

Fiche 7. Intégrales

Savoir.

- ☐ Comprendre le lien entre intégrale et aire.
- ☐ Connaître les propriétés de l'intégrale.

Savoir-faire.

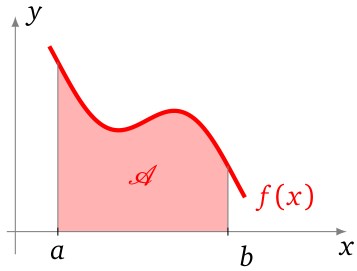
- ☐ Savoir calculer des intégrales simples.

Vidéo ■ Fiche 7. Intégrales

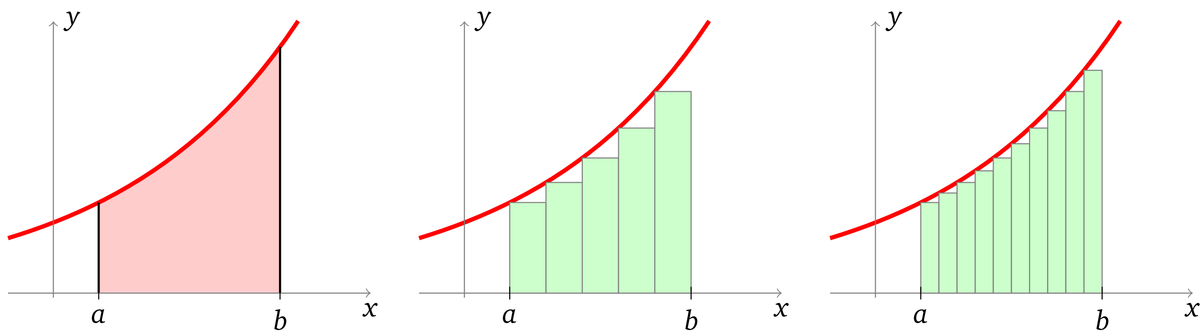
Intégrale et aire

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Nous définissons l'intégrale comme l'aire sous la courbe de f.

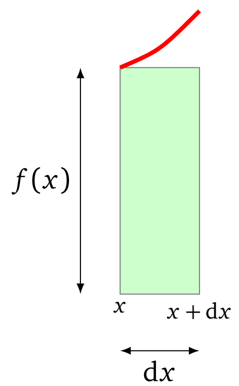
$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$



Pour calculer l'aire et définir l'intégrale, on découpe l'intervalle $[a, b]$ et on construit des rectangles sous le graphe. Plus la base des rectangles est petite, plus l'ensemble des rectangles approche mieux l'aire sous la courbe.

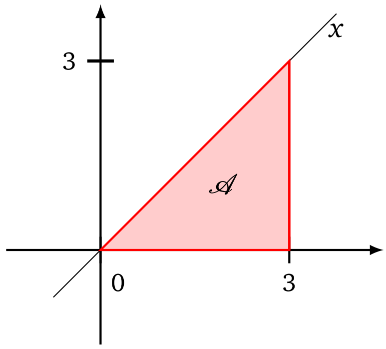


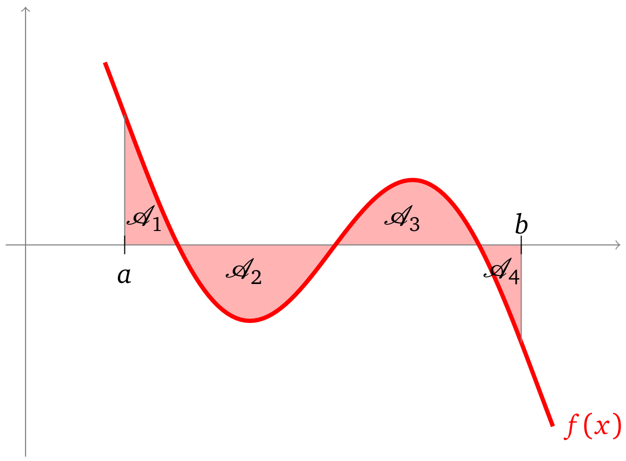
Un rectangle élémentaire entre x et $x+\mathrm{d}x$ a pour base $\mathrm{d}x$ (où $\mathrm{d}x$ désigne ici un élément infinitésimal) et pour hauteur $f(x)$ donc son aire vaut $f(x) \times \mathrm{d}x$. Ainsi l'aire sous la courbe est approchée par une somme de termes $f(x)\mathrm{d}x$, pour x variant de a à b. Cette somme est notée $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Le symbole $\int$ étant un S allongé (pour Somme).



Exemple.

$$\int_0^3 x \, dx = \text{ aire du triangle} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2} = \frac{9}{2}$$





Signe. L'intégrale compte les aires avec un signe « + » ou « − ». Les aires sous l'axe des abscisses sont comptées négativement. Si on note $\mathscr{A}_i > 0$ les aires ci-contre, alors

$$\int_a^b f(x)\, dx = \mathscr{A}_1 - \mathscr{A}_2 + \mathscr{A}_3 - \mathscr{A}_4$$

Propriétés de l'intégrale.

— L'intégrale est **linéaire** :

$$\boxed{\int_a^b f(x) + g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \; + \int_a^b g(x) \, dx \qquad \text{et} \qquad \int_a^b k \cdot f(x) \, dx = k \int_a^b f(x) \, dx}$$

— La relation de Chasles est vérifiée :

$$\boxed{\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx \; + \int_c^b f(x) \, dx}$$

Avec $\int_a^a f(x)\, dx = 0$ et $\int_b^a f(x)\, dx = -\int_a^b f(x)\, dx$.

Exemple.

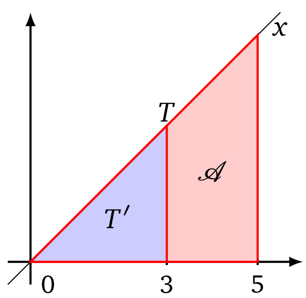
$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 2xe^x - 7\cos(x)\, dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} xe^x \, dx \; - \; 7\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\, dx$$

Ainsi la linéarité permet de se ramener au calcul d'intégrales plus simples. (On verra dans les autres fiches comment calculer ces intégrales.)

Exemple. Comment calculer $\int_3^5 x \, dx$?

On peut utiliser la relation de Chasles sur les bornes :

$$\underbrace{\int_0^5 x \, dx}_{\text{aire du triangle } T} \; = \; \underbrace{\int_0^3 x \, dx}_{\text{aire du triangle } T'} \; + \; \underbrace{\int_3^5 x \, dx}_{\mathscr{A}}$$



Ainsi en utilisant la formule $\frac{\text{base}\times\text{hauteur}}{2}$ pour calculer l'aire des deux triangles, on a :

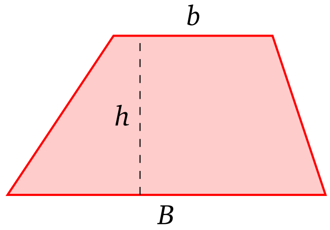
$$\frac{5\times 5}{2}=\frac{3\times 3}{2}+\mathscr{A}.$$

Ainsi

$$\mathscr{A}=\int_3^5 x\,\mathrm{d}x=\frac{25}{2}-\frac{9}{2}=\frac{16}{2}=8.$$

Exercice. Retrouver cette aire en utilisant la formule générale de l'aire d'un trapèze.

$$\mathscr{A}=\frac{(\text{petite base}+\text{grande base})}{2}\times\text{hauteur}=\frac{(b+B)}{2}\times h$$



Fiche 8. Primitives

Savoir.

- ☐ Connaître la définition d'une primitive.
- ☐ Connaître les formules des primitives usuelles.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir déterminer une primitive.
- ☐ Savoir utiliser les primitives pour calculer des intégrales.

Vidéo ■ Fiche 8. Primitives

Primitives

— **Définition.** Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction F est une **primitive** de f si pour tout $x \in I$:

$$\boxed{F'(x) = f(x)}$$

— Exemples.

 — $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive de $f(x) = x^2$.

 — $\ln(x)$ est une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0,+\infty[$.

— Trouver une primitive est l'opération inverse du calcul de la dérivée.

— Exercice. Trouver une primitive de chacune des fonctions suivantes :

- x
- $\cos(x)$
- $\sin(x)$
- e^{-x}
- $\frac{3}{x} - \frac{7}{x^2} + 1$
- $\frac{1}{\cos^2(x)}$

Calculs d'intégrales à l'aide d'une primitive

Théorème. Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a,b]$. Soit F une primitive de f. Alors :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)}$$

— C'est le moyen le plus efficace pour calculer des intégrales !

— Notation par des crochets. $\boxed{\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)}$.

— Exemple.

$$\int_1^2 x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{7}{3}.$$

— Exemple.

$$\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \big[\ln(x)\big]_2^7 = \ln(7) - \ln(2) = \ln\left(\tfrac{7}{2}\right).$$

Toutes les primitives

- Une primitive n'est pas unique ! Soit $f(x) = x^2$, alors $F(x) = \frac{x^3}{3}$ est une primitive. Mais la fonction $G(x) = \frac{x^3}{3} + 2$ est aussi une primitive (dérivez-la pour vérifier). Il y a donc plusieurs primitives. En fait toutes les fonctions $\frac{x^3}{3} + c$, où c est une constante, sont des primitives. Nous généralisons ceci à toutes les fonctions :

Proposition. Si $F(x)$ est une primitive de $f(x)$, alors les autres primitives sont de la forme $F(x)+c$ où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.

- Exemple. Les primitives de $x^4 - 3x + 5$ sont les fonctions $\frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{2}x^2 + 5x + c$, où $c \in \mathbb{R}$ est une constante.
- Exercice. Vérifier que les primitives de la fonction $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ sont les fonctions $\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$.
- Pour calculer une intégrale, vous choisissez la primitive que vous voulez car $\left[F(x)\right]_a^b$ donne le même résultat quelle que soit la primitive.

Primitives usuelles

Primitives des fonctions classiques

Ici c désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitives**
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + c$
x^α	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c \quad$ (c'est $\alpha = \frac{1}{2}$)
e^x	$e^x + c$
$\cos(x)$	$\sin(x) + c$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + c$

Ces formules sont à maîtriser ! Mais ce sont juste les formules des dérivées que vous connaissez déjà.

Primitives pour une composition

Ici u est une fonction qui dépend de x ; c désigne une constante réelle.

Fonction	**Primitive**
$u'u^n$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N})$
$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert) + c$
$u'u^\alpha$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$
$u'e^u$	$e^u + c$
$u'\cos(u)$	$\sin(u) + c$
$u'\sin(u)$	$-\cos(u) + c$

— Exemple. Comment calculer $\int_1^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x$? Avec $u(x) = x^2$ (et donc $u'(x) = 2x$) on a $2xe^{x^2} = u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive est $e^{x^2} = e^{u(x)}$. Ainsi

$$\int_1^2 xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^2 2xe^{x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_1^2 = \frac{1}{2}(e^4 - e).$$

— Exemple. On sait que $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\frac{\cos'(x)}{\cos(x)}$. Par le tableau précédent, les primitives de la fonction tangente sont les fonctions de la forme $F(x) = -\ln(|\cos(x)|) + c$ où c est une constante réelle.

Fiche 9. Changement de variable

Savoir.

- ☐ Comprendre la formule du changement de variable.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir trouver le bon changement de variable.
- ☐ Savoir changer les bornes de l'intégrale.
- ☐ Savoir changer l'élément différentiel.

Vidéo ■ Fiche 9. Changement de variable

Formule du changement de variable

Calculer l'intégrale $\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$ par la formule du changement de variable c'est utiliser la formule suivante :

$$\boxed{\int_a^b f(u(x))\,u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u}$$

Pour la pratique du changement de variable :

a) On doit identifier quelle est la fonction $u(x)$ qui réalise la bon changement de variable. Ce n'est pas toujours évident, il faut parfois faire plusieurs essais. Le but est d'obtenir une intégrale (à droite dans la formule ci-dessus) plus simple à calculer.

b) Il faut calculer le nouvel élément différentiel : $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$.

c) Il faut changer les bornes de l'intégrale : si x varie de a à b, alors u varie de $u(a)$ à $u(b)$.

d) L'intégrale à calculer (en la variable x) est remplacée par une intégrale en la variable u (normalement plus simple).

Cela peut sembler un peu compliqué, mais après avoir pratiqué plusieurs exemples c'est assez facile !

Exemples

Exemple 1.
On veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\mathrm{d}x.$$

On pose le changement de variable $u(x) = 3x$. On a alors $u'(x) = 3$, donc $\mathrm{d}u = 3\,\mathrm{d}x$, ou encore $\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{3}$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = \frac{\pi}{6}$, alors u varie de $u = 0$ à $u = \frac{\pi}{2}$. Ainsi,

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3}$$

L'intégrale de droite est quand même plus facile à calculer !
Concluons :

$$\int_{x=0}^{x=\frac{\pi}{6}} \cos(3x)\,\mathrm{d}x = \int_{u=0}^{u=\frac{\pi}{2}} \cos(u)\,\frac{\mathrm{d}u}{3} = \frac{1}{3}\big[\sin(x)\big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}\big(\sin(\tfrac{\pi}{2}) - \sin(0)\big) = \frac{1}{3}.$$

Exemple 2.
On veut calculer
$$\int_0^1 \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}}\mathrm{d}x.$$
On pose le changement de variable $u(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = e^x$, donc $\mathrm{d}u = e^x\,\mathrm{d}x$. Comme x varie de $x = 0$ à $x = 1$, alors u varie de $u = e^0 = 1$ à $u = e^1 = e$. Ainsi la formule du changement de variable donne :
$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{u=1}^{u=e} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}}.$$
La seconde intégrale, avec la variable u, est plus simple à calculer car une primitive de $\frac{1}{\sqrt{u+1}}$ est $2\sqrt{u+1}$. Ainsi :
$$\int_{x=0}^{x=1} \frac{e^x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{e^x+1}} = \int_{u=1}^{u=e} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u+1}}\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{u+1}\right]_{u=1}^{u=e} = 2\left(\sqrt{e+1}-\sqrt{2}\right).$$

Fiche 10. Intégration par parties

Savoir.

- ☐ Connaître la formule d'intégration par parties.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir calculer un intégrale à l'aide d'une intégration par parties.

Vidéo ■ Fiche 10. Intégration par parties

Formule d'intégration par parties

Soient u et v deux fonctions dérivables sur $[a,b]$. On cherche à calculer $\int_a^b u(x)v'(x)\mathrm{d}x$ à l'aide d'une méthode donnée par la formule suivante.

Formule d'intégration par parties (IPP).

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x = \big[u(x)v(x)\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x}$$

— On rappelle que $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Donc $\big[u(x)v(x)\big]_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

— N'oubliez pas le signe « moins » dans la formule !

— Cette méthode ne fonctionne qui si l'intégrale tout à droite $\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x$ est plus facile à calculer que l'intégrale de départ.

— La preuve de la formule est basée sur la formule $(uv)' = u'v + uv'$, donc $uv' = (uv)' - u'v$. Ainsi $\int uv' = \int (uv)' - \int u'v$. Mais une primitive de $(uv)'$ est uv donc $\int uv' = [uv] - \int u'v$.

Exemples

Exemple 1. On veut calculer

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)\mathrm{d}x.$$

On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = \sin(x)$, alors $u'(x) = 1$ et $v(x) = -\cos(x)$ (une primitive de $\sin(x)$ est $-\cos(x)$).

Ainsi,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(x)\mathrm{d}x &= \big[-x\cos(x)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} -1\cdot\cos(x)\mathrm{d}x \\
&= \left(-\tfrac{\pi}{4}\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right) + 0\cos(0)\right) + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos(x)\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \big[\sin(x)\big]_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(\sin\left(\tfrac{\pi}{4}\right) - \sin(0)\right) \\
&= -\frac{\pi}{4}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= (1 - \frac{\pi}{4})\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

Exemple 2.
On veut calculer
$$I = \int_1^2 xe^x \, \mathrm{d}x.$$
On pose $u(x) = x$ et $v'(x) = e^x$. On a alors $u'(x) = x$ et $v(x) = e^x$. Ainsi,
$$\begin{aligned} I = \int_1^2 xe^x \, \mathrm{d}x &= \left[xe^x\right]_1^2 - \int_1^2 e^x \, \mathrm{d}x \\ &= (2e^2 - e) - \left[e^x\right]_1^2 = (2e^2 - e) - (e^2 - e) \\ &= e^2. \end{aligned}$$

Remarques.

- On pourrait calculer $J = \int_1^2 x^2 e^x \, \mathrm{d}x$ par deux intégrations par parties successives : en posant $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$, la formule ne donne pas directement le résultat mais conduit à une formule avec l'intégrale $I = \int_1^2 xe^x \, \mathrm{d}x$ que l'on a déjà calculée ci-dessus.
- *Astuce.* Pour calculer $\int_a^b \ln(x) \, \mathrm{d}t$ par intégration par parties, il suffit d'écrire $\ln(x) = \ln(x) \times 1$ afin de faire apparaître artificiellement une multiplication.

Fiche 11. Longueur, aire, volume

Savoir.

- ☐ Connaître le lien entre intégrale et aire sous la courbe.

Savoir-faire.

- ☐ Savoir appliquer les formules données pour calculer des longueurs, des aires et des volumes.

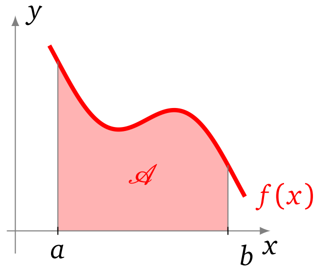
`Vidéo ■ Fiche 11. Longueur, aire, volume`

Nous allons donner quelques exemples d'application du calcul intégral aux calculs d'aires, de longueurs ou de volumes.

Aire sous une courbe

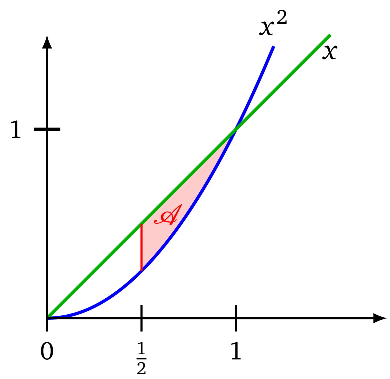
On sait déjà que l'aire sous le graphe d'une fonction est mesurée par une intégrale.

$$\mathscr{A} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

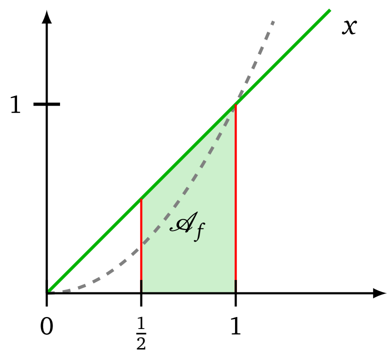


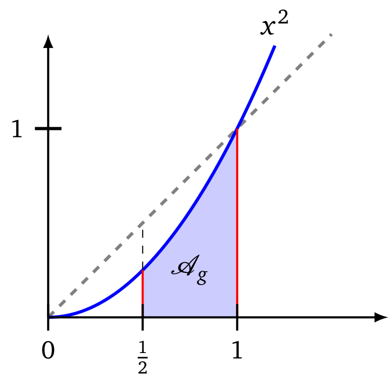
Cette propriété permet de calculer des aires délimitées par deux courbes.

Exercice. Combien vaut l'aire représentée sur ce dessin ?



Solution. On note $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. L'aire $\mathscr{A}$ est délimitée par les graphes de la fonction f et g, la droite d'équation $x = \frac{1}{2}$ (et la droite d'équation $x = 1$).
Cette aire se calcule comme la différence des deux aires $\mathscr{A}_f - \mathscr{A}_g$.





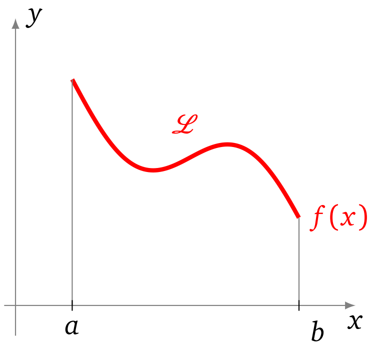
On a donc :

$$\begin{aligned}\mathscr{A} = \mathscr{A}_f - \mathscr{A}_g &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\frac{1}{2}}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x) - g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x - x^2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{24}\right) \\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Longueur d'une courbe

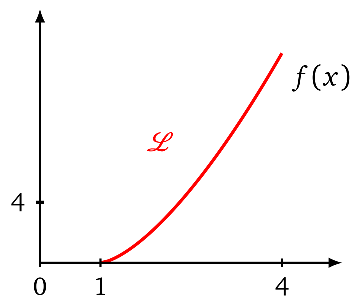
Formule. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. La longueur $\mathscr{L}$ de la courbe de f entre les abscisses a et b est donnée par :

$$\boxed{\mathscr{L} = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x}$$



Cette formule n'est pas à connaître, elle sera donnée à chaque fois, mais il faut savoir l'appliquer !

Exercice. Quelle est la longueur de cette portion de courbe définie par $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ sur l'intervalle $[1,4]$?



Solution.
Considérons $f(x) = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ sur l'intervalle $[1,4]$. Alors $f'(x) = \sqrt{x-1}$, donc $f'(x)^2 = x - 1$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\mathscr{L} &= \int_1^4 \sqrt{1 + f'(x)^2}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \sqrt{1 + \sqrt{x-1}^{\,2}}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^4 \sqrt{1 + (x-1)}\,\mathrm{d}x = \int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_1^4 = \frac{2}{3}(8-1) = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

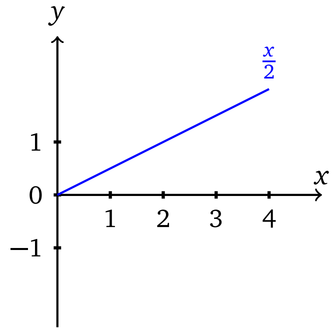
Volume

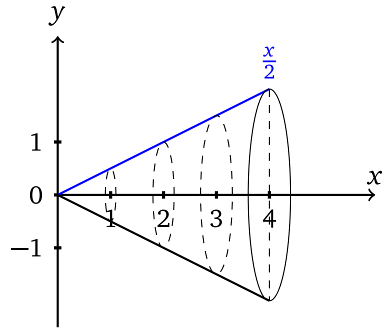
Formule. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. On considère l'objet obtenu par rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses. Le volume $\mathscr{V}$ de l'objet est donné par :

$$\boxed{\mathscr{V} = \int_a^b \pi f(x)^2 \,\mathrm{d}x}$$

Cette formule n'est pas à connaître.

Exercice. Quel volume est obtenu par rotation du graphe de $f(x) = \frac{x}{2}$ autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,4]$?





Solution. Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$. Par rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses, on obtient un cône ayant pour sommet l'origine. La formule du volume s'écrit :

$$\mathscr{V} = \int_0^4 \pi f(x)^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^4 \frac{x^2}{4} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16\pi}{3}.$$

Exercice. Retrouver ce résultat en appliquant la formule du volume d'un cône $\mathscr{V} = \frac{1}{3}Sh$, ou S est la surface de la base (ici l'aire du disque en $x = 4$) et h la hauteur (ici $h = 4$).

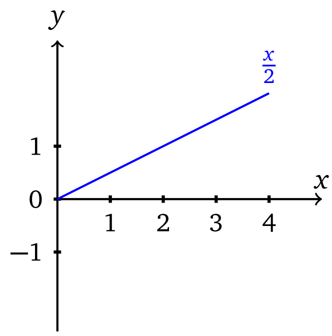
Aire de la surface d'un objet

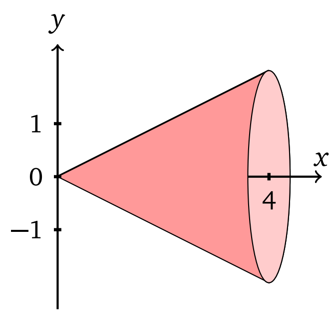
Formule. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction positive. On considère l'objet obtenu par rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses. L'aire $\mathscr{S}$ de la surface de l'objet obtenu est donnée par :

$$\boxed{\mathscr{S} = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\mathrm{d}x.}$$

Cette formule n'est pas à connaître.

Exercice. Quelle est l'aire de la surface de l'objet obtenu par rotation du graphe de $f(x) = \frac{x}{2}$ autour de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0,4]$?





Solution. Soit $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x}{2}$. Par rotation du graphe de f autour de l'axe des abscisses, on obtient un cône ayant pour sommet l'origine. La formule de la surface du cône s'écrit :

$$\mathscr{S} = \int_0^4 2\pi f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} \,\mathrm{d}x = 2\pi \int_0^4 \frac{x}{2}\sqrt{1 + \frac{1}{4}} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi\sqrt{5}}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = \frac{\pi\sqrt{5}}{2} \times \frac{4^2}{2} = 4\pi\sqrt{5}.$$