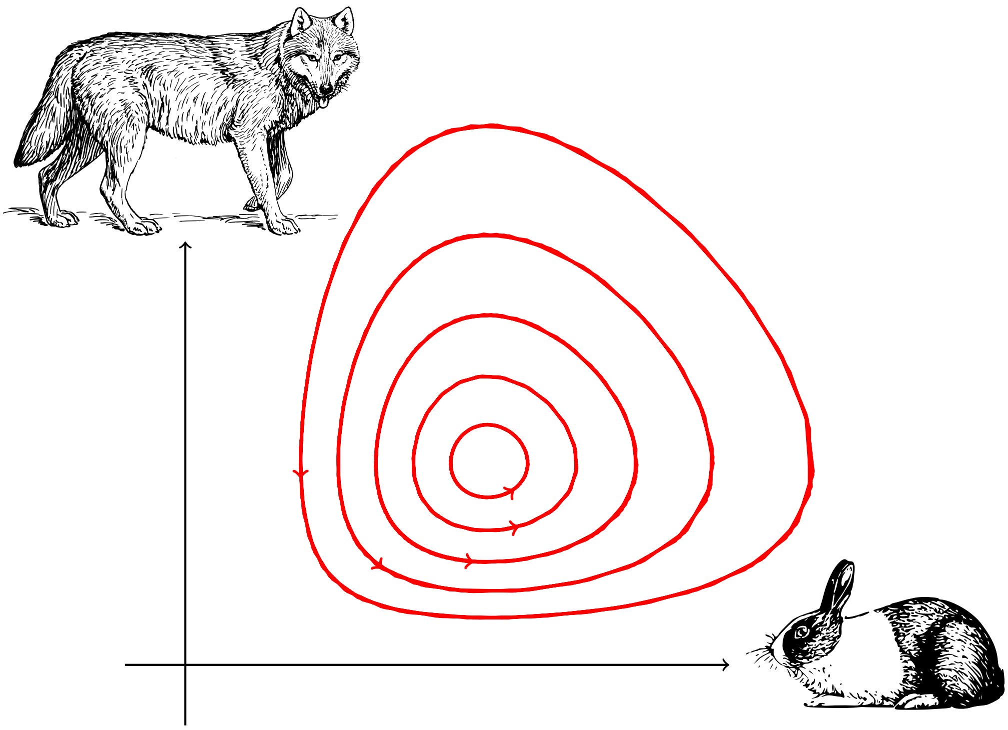
Licence Sciences de la Vie, de la Terre et de l'Environnement

Math SVTE : Initiation à l'analyse



Septembre 2020

Université de Lille
1 SCIENCES ET TECHNOLOGIES

Programme

Calcul différentiel [15h]

Rappels sur les fonctions usuelles : domaine de définition, graphe, dérivée, limites (fonctions affines, polynomiales, racine, inverse, exp, ln, puissance, sin, cos, tan).

Dérivée : règles de calculs (à partir des dérivées des fonctions usuelles) : somme, produit, quotient, composition de fonction.

Limites :

— règles de calcul et formes indéterminées, règle de l'Hospital ;

— une fonction monotone bornée admet une limite en $\pm\infty$.

Études de fonctions : domaine de définition, tableaux de variations, extrema, limites aux bords.

Équation différentielles :

— explication des termes d'une équation différentielle à partir des notions comme « effectif », « taux de croissance », « proportionnalité » ;

— vérification qu'une fonction est solution d'une équation ;

— recherche des solutions constantes ;

— étude qualitative : obtenir des informations sur (la monotonie de) une solution avec une condition initiale, sous la condition que les courbes des solutions ne se croisent pas.

Primitives et intégrales [13h]

Notion de primitive : comme "opération inverse" de la dérivée.

Intégrale de Riemann : idée de la construction, interprétation comme surface sous une fonction positive, lien avec les primitives.

Règles de calcul : changement de variable, intégration par parties.

Applications : calculs des volumes, surfaces et longueur.

Intégration d'équations différentielles : au moyen de primitives, exemples du premier chapitre.

CALCUL DIFFÉRENTIEL 1

Échauffement

Exercice 1 Déterminer le domaine de définition maximal des expressions suivantes :

a) $f_1(x) = x^2 + x + 1$

b) $f_2(x) = \sqrt{x - 1}$

c) $f_3(x) = \sqrt{\frac{2+3x}{5-2x}}$

d) $f_4(x) = \ln(4x + 3)$

Exercice 2 Soit $f : x \mapsto -x^2 + x + 2$.

a) Déterminer les racines de f.

b) Dresser le tableau des variations de f et donner ces intervalles de monotonie.

c) Tracer le graphe de la fonction f. Donner son image.

d) Résoudre les inégalités $f(x) \leq 0$, $f(x) > 1$, $f(x) < 5$.

Exercice 3 Soit $f : x \mapsto \sqrt{x + 1}$.

a) Déterminer le domaine de définition de la fonction f.

b) Dresser le tableau des variations de f et donner ces intervalles de monotonie.

c) Tracer le graphe de la fonction f.

d) Résoudre les inégalités $f(x) \leq 1$, $f(x) > 2$.

Exercice 4 Résoudre les équations suivantes :

a) $3 \ln(x + 4) = 9$

b) $\ln(x^2) + 3 \ln(x) = 5$

c) $\ln(x + 2) + \ln(x) = 3$

d) $[\ln(x)]^2 - 2 = 0$

e) $e^x = e^{1-x}$

f) $e^{3x} - 2e^{-x} = 0$

g) $2^{x^2} = 4 \times 2^{-x}$

h) $3^x - 2^{x^2} = 0$

Exercice 5 Calculer les limites suivantes.

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x}$

b) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{\ln(x)}$

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{2x^2+x+1}$

d) $\lim\limits_{x\to0} \frac{\sin(x)}{x}$

e) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x-1}{x+1}$

f) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

g) $\lim\limits_{x \to +\infty} x - \ln(x)$ h) $\lim\limits_{x \to +\infty} x \tan(\frac{1}{x})$ i) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x$

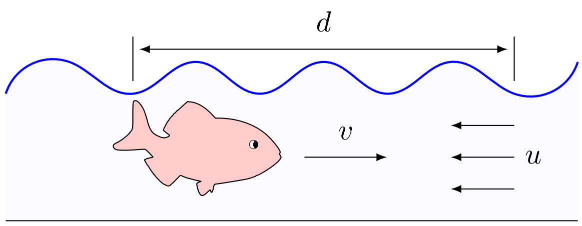
Exercice 6 Étudier les fonctions suivantes.

a) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x - 3}$ c) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x+2}}$ e) $\ln(x - \frac{1}{x})$ g) $\dfrac{2x^3}{x^2 - 1}$

b) $x + e^{-x}$ d) $x^2 - 8\ln(x) + 1$ f) $x^{\frac{1}{x}}$ h) $\ln(x+1) - \ln(x) + x$

Problèmes d'optimisation

Exercice 7



L'énergie dépensée par un poisson pour remonter une distance d d'un courant de vitesse u à la vitesse v est donnée par

$$E(v) = v^3 \frac{d}{v - u}.$$

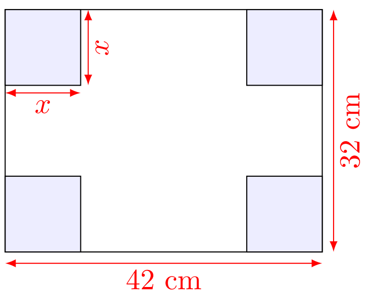
a) Quel est le domaine de définition de cette fonction ?

b) On se restreindra ici au domaine $]u, +\infty[$. Expliquer pourquoi.

c) Étudier la fonction E sur $]u, +\infty[$.

d) En déduire la vitesse v qui minimise l'énergie $E(v)$, puis calculer cette énergie minimale.

Exercice 8



On souhaite construire un casier rectangulaire en découpant quatre carrés de même taille aux coins d'une feuille cartonnée et en rabattant les bords restants. La feuille mesure 42 cm de long et 32 cm de large. Le volume du casier dépendra de la taille des carrés découpés. Dans cet exercice on cherche à trouver la taille des carrés qui maximisera le volume du casier.

a) On note x la longueur d'un des côtés des carrés. Montrer que l'on a $0 < x < 16$.

b) Montrer que le volume V s'exprime en fonction de x sous la forme

$$V(x) = 4(336x - 37x^2 + x^3)$$

c) Étudier la fonction V sur $]0, 16[$. En déduire la taille des carrés qui maximisera le volume du casier.

d) Calculer le volume maximale du casier réalisable avec cette feuille.

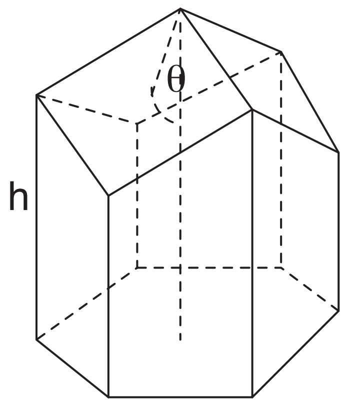
Exercice 9 Un camion doit faire un trajet de 140 km. On sait que sa consommation en gazole est de $(4+\frac{v^2}{1225})$ litres par heure, où v désigne la vitesse du camion en km/h. Le prix du gazole est de 1 euro et 40 centimes par litre (en Belgique). Dans cet exercice, on cherche la vitesse du camion (supposée constante en fonction du temps) qui minimisera le prix de revient de la course.

a) Expliquer pourquoi le nombre de litres $N(v)$ consommés par le camion en 140 km, en fonction de v, est
$$N(v) = (4+\frac{v^2}{1225})\frac{140}{v}.$$

b) En déduire l'expression du prix de revient $P(v)$ (en euros) de la course en fonction de v.

c) Étudier la fonction P sur $]0,+\infty[$. En déduire la vitesse v qui minimise le prix de revient de la course. Quelle est ce prix minimal ?

Exercice 10 Dans une ruche, chaque alvéole a une forme de prisme hexagonal dont la surface est donnée, pour une longueur de côté s et une hauteur h par
$$A(\theta) = 6sh - \frac{3}{2}s^2\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} + \frac{3\sqrt{3}}{2}s^2\frac{1}{\sin(\theta)}$$
où θ désigne l'angle au sommet du prisme.



a) Quelle est le domaine de définition de cette fonction ?

b) On se restreindra ici au domaine $]0,\pi[$. Expliquer pourquoi.

c) Etudier la fonction A sur $]0,\pi[$.

d) En déduire l'angle θ qui minimise la surface $A(\theta)$ d'une telle alvéole et déterminez, en fonction de s et h, la surface correspondante.

Dans la réalité, les alvéoles ont l'angle θ optimal à ± 2 degrés près.

Équations différentielles

Exercice 11 La variole est une maladie très contagieuse. Lorsqu'un individu est infecté, soit il meurt, soit il est immunisé pour le reste de sa vie. On a donc cherché à savoir s'il fallait inoculer la variole de façon préventive (et inoffensive) à toute la population.

Si la variole a été inoculée, le nombre $P(x)$ d'individus encore vivants à l'âge x (en décennies) satisfait l'équation différentielle suivante.

$$y'(x) = -\frac{x+1}{x+2}\,y(x) \quad \text{pour} \quad x \geq 0. \tag{1}$$

a) Soit $K > 0$. Vérifier que la fonction définie par $P(x) = K(x+2)e^{-x}$ est solution de l'équation différentielle (1).

b) Montrer que $P(x) > 0$ pour tout $x \geq 0$.

Si la variole n'avait pas été inoculée, on aurait eu

$$T(x) = \frac{K}{8}(7e^{x/8} + 1)(x+2)e^{-\frac{9x}{8}} \qquad \text{individus d'âge } x.$$

On pose $f(x) = \frac{T(x)}{P(x)}$ pour tout $x \geq 0$.

a) Montrer que $f(x) = \frac{1}{8}(7 + e^{-x/8})$.

b) Établir le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

c) A-t-on intérêt à inoculer préventivement la variole aux nourrissons ?

La variole a été éradiquée en 1979.

Exercice 12 On observe une population de microbes se développant de manière malthusienne, c'est à dire dont le taux de croissance au temps t (en heures) est proportionnel à la taille de la population $N(t)$.

a) En notant k la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.

b) Montrer que les fonctions $N(t) = Ce^{kt}$ (où C est une constante) sont solutions de cette équation différentielle.

c) Que représente C ?

d) Si $k = \ln 2$, que peut-on dire de la population au bout d'une heure ?

e) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, quelle sera, d'après le modèle, la taille de la population au bout de 4 heures et 20 minutes ?

f) Si $k = \ln 2$ et $N(0) = 100$, au bout de combien de temps la population atteindra-t-elle 1000 individus ?

Exercice 13 On modélise le refroidissement d'une roche lors d'une éruption volcanique, en partant du principe que le taux de refroidissement est proportionnel à la différence de température entre la roche et l'air ambiant. On note T_a la température de l'air ambiant et $T(t)$ la température (en degrés Celsius) de la roche au temps t (en heures).

a) En notant $k > 0$ la constante de proportionnalité, donner une équation différentielle modélisant cette situation.

b) Montrer que les fonctions $T(t) = C\,e^{-kt} + T_a$ (où C est une constante) sont les solutions de cette équation différentielle.

c) Que représente C ?

d) Si $k = \ln 3$, $T_a = 50$ et $T(0) = 500$, quelle sera, d'après le modèle, la température de la roche après 30 minutes ?

e) Si $k = \ln 3$, $T_a = 50$ et $T(0) = 500$, au bout de combien de temps la température de la roche sera-t-elle de 100 degrés Celsius ?

Exercice 14 On considère une population de bactéries. On note $x(t)$ le nombre de bactéries à l'instant t, et x_0 le nombre de bactéries au début de l'expérience (instant $t = 0$).

Lorsque la bactérie est isolée, l'effectif $x(t)$ possède une vitesse de croissance $x'(t)$ proportionnelle à $x(t)$ (on note $\alpha > 0$ ce coefficient de proportionnalité). Lorsqu'une certaine toxine est présente dans le milieu de culture en quantité $y(t)$, le coefficient de proportionnalité α est diminué de la quantité $y(t)$. On suppose que $y(t)$ croit de façon affine en fonction du temps, par exemple $y(t) = 2t + 1$.

a) Expliquer pourquoi $x(t)$ est solution du problème

$$x'(t) = (\alpha - 2t - 1)x(t) \qquad (1)$$

$$x(0) = x_0 \qquad (2)$$

Dans la suite, on suppose qu'il y a des bactéries lorsqu'on débute l'expérience : $x_0 > 0$.

b) On cherche une solution sous la forme $x(t) = e^{p(t)}$ où $p(t) = at^2 + bt + c$ est un polynôme de degré 2. A quelle condition sur les coefficients de p l'équation (2) est-elle vérifiée ? A quelle condition sur les coefficients de p l'équation (1) est-elle vérifiée ? En déduire $x(t)$.

c) On suppose $\alpha > 1$. Étudier les variations de la fonction $x(t)$. A quel moment la population de bactéries est-elle maximale ? La population a-t-elle une chance de survie en grand temps ?

Exercice 15 On considère le problème

$$y'(t) = -t^2 y(t) \quad \text{pour } t \geq 0 \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

a) Montrer que la fonction constante $y(t) = 0$ est solution de (1). Y a-t-il d'autres solutions constantes ?

b) On suppose que y est une solution de (1) et (2), et on suppose $y_0 > 0$.

(i) Montrer que $y(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ (*on admettra que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

(ii) Montrer que y est décroissante sur $[0; +\infty[$. En déduire que $y(t)$ a une limite quand $t \to +\infty$.

c) On pose $u(t) = at^3 + b$ et $Y(t) = e^{u(t)}$, où a et b sont des constantes.

(i) Calculer $u'(t)$ et $Y'(t)$.

(ii) Déterminer la constante a pour que $Y(t)$ soit solution de (1).

(iii) Calculer $Y(0)$. Comment faut-il choisir b pour avoir $Y(0) = y_0$?

(iv) Calculer $\lim_{t\to+\infty} Y(t)$, en prenant pour a et b les valeurs trouvées dans les questions précédentes.

Exercice 16 On étudie la progression d'une maladie contagieuse dans une population donnée. On note $x(t)$ la proportion des personnes malades à l'instant t, $y(t)$ celle des personnes saines, et y_0 la proportion de personnes saines à l'instant initial $t = 0$. On a donc $x(t) + y(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

On suppose que la vitesse de propagation de la maladie $x'(t)$ est proportionnelle au produit $x(t)y(t)$ (ce qui signifie que la maladie se propage par contact).

a) Expliquer pourquoi il existe une constante $K > 0$ telle que $y(t)$ soit solution du problème

$$y'(t) = -Ky(t)(1 - y(t)) \tag{1}$$

$$y(0) = y_0 \tag{2}$$

pour tout $t \geq 0$.

b) Chercher les solutions constantes de l'équation (1).

Dans la suite, on supposera $0 < y_0 < 1$.

c) Déduire de l'équation différentielle (1) que la fonction y est décroissante (*indication : étudier le signe de $y'(t)$ en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

d) En déduire que $\lim_{t\to+\infty} y(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. On admet que dans ce cas $y'(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$. En déduire, en utilisant (1), que $l = 0$. La population peut-elle survivre sans intervention extérieure ?

e) On considère la fonction
$$Y(t) = \frac{1}{1 + C\,e^{Kt}}. \tag{3}$$
   (i) Montrer que lorsque $C \geq 0$, $Y(t)$ est défini pour tout $t \geq 0$.

   (ii) Montrer que $Y(t)$ est solution de l'équation (1).

   (iii) Trouver C pour que $Y(t)$ satisfasse aussi (2).

   (iv) Répondre à la question (d) en utilisant l'expression (3).

Exercice 17 On étudie l'évolution d'une population de thons en Alaska. On note $p(t)$ le nombre (en centaines) de thons à l'instant $t \geq 0$ (en heures). On observe que cette population a un taux de croissance de 3% à chaque instant t. Cette population subit les assauts d'une pêche intensive qui réduit la population de $10^{-2}p(t)^2$ thons par heure. De plus, à chaque heure, 2 thons quittent la population pour des causes naturelles. On obtient alors l'équation différentielle satisfaire par $p(t)$:
$$p'(t) = 10^{-2}(-p(t)^2 + 3p(t) - 2) \tag{1}$$

a) Expliquer chaque terme de l'équation (1) à l'aide du texte introductif.

b) Calculer les solutions de l'équation $-p^2 + 3p - 2 = 0$.

c) En déduire les solutions constantes de l'équation (1).

d) On considère maintenant la solution $p(t)$ de (1) vérifiant $p(0) = 10$.
   (i) Montrer que le nombre de thons diminue au cours du temps en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais.

   (ii) Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} p(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$, puis calculer l en admettant que $\lim\limits_{t\to+\infty} p'(t) = 0$. La population de thons a-t-elle une chance de survie en grand temps ?

Exercice 18 On considère le problème représenté par les deux équations suivantes :
$$y'(t) = (y(t) - 1)^2(y(t) + 1) \tag{1}$$
$$y(0) = 0 \tag{2}$$
et l'on suppose qu'il existe une fonction $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ solution de ce problème.

a) Chercher les solutions constantes de l'équation différentielle (1).

b) Montrer que la solution y du problème est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (*indication : étudier le signe de $y'(t)$ en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

c) En déduire que $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = l$ avec $l \in \mathbb{R}$. Calculer l en admettant que $\lim\limits_{t\to+\infty} y'(t) = 0$.

Exercice 19 Lorsqu'une nouvelle espèce s'introduit dans un écosystème, elle évolue d'abord lentement. Son rythme de croissance s'accélère ensuite à mesure qu'elle s'adapte, puis ralentit quand le nombre d'individus u devient trop important compte tenu des ressources disponibles. Pour ce type d'évolution, on utilise le modèle de Gompertz suivant :

$$u'(t) = -u(t)\ln(u(t)) \tag{1}$$

$$u(0) = u_0 \tag{2}$$

où u_0 désigne le nombre d'individus introduits au départ dans l'écosystème.

a) Chercher les solutions constantes de l'équation (1).

b) Déduire de l'équation différentielle (1) que la fonction u est décroissante si $u_0 > 1$, et croissante si $0 < u_0 < 1$ (*indication : étudier le signe de $u'(t)$ en admettant que les graphes de deux solutions distinctes de (1) ne se coupent jamais*).

c) En déduire que $l = \lim_{t\to+\infty} u(t)$ existe.

d) Que vaut l ? La population va-t-elle survivre ?

e) On considère la fonction $U(t) = e^{Ce^{-t}}$ (où C est une constante).

   (i) Montrer que U est solution de (1) et que $U(0) > 0$.

   (ii) Trouver C pour que la fonction U soit solution du problème (1-2).

   (iii) Répondre à la question (d) en utilisant l'expression de $U(t)$.

2 PRIMITIVES et INTÉGRALES

Échauffement

Exercice 20 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_2^4 (x-2)^5 \, dx$

b) $\int_0^1 \sqrt{3y+1} \, dy$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} 5\sin(2\theta) \, d\theta$

d) $\int_0^1 e^{3x} dx$

e) $\int_0^1 \frac{1}{(2t+1)^3} dt$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \tan^2(3\theta) \, d\theta$

Exercice 21 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x e^{x^2} dx$

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{3\cos(y)} \sin y \, dy$

c) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan(\theta) \, d\theta$

d) $\int_1^5 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx$

e) $\int_0^1 x \frac{2x^2+1}{1+x^2+x^4} dx$

f) $\int_0^1 \frac{\sin(\ln(1+\theta^2))}{1+\theta^2} \, \theta \, d\theta$

Exercice 22 Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_0^1 x e^x \, dx$

b) $\int_0^1 y^2 e^{2y} \, dy$

c) $\int_1^2 \ln(t) \, dt$

d) $\int_0^{\pi} \theta \cos(\theta) \, d\theta$

e) $\int_0^1 (x^3+x) e^{x^2+1} \, dx$

f) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(\theta) \ln(\cos(\theta)) \, d\theta$

Exercice 23

a) Déterminer A et B tels que $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$, puis calculer $\int_2^4 \frac{1}{x^2-1} dx$.

b) Déterminer A, B tels que $\frac{x}{2x^2+9x+9} = \frac{A}{x+3} + \frac{B}{2x+3}$, puis calculer $\int_0^1 \frac{x}{2x^2+9x+9} dx$.

c) Déterminer A, B, C tels que $\frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{C}{2x+1}$, puis calculer $\int_0^1 \frac{x-2}{(x^2+1)(2x+1)} dx$.

Calcul de débit

Exercice 24 La respiration est cyclique et un cycle respiratoire complet du début de l'inspiration à la fin de l'expiration dure environ 5 secondes. Le débit maximal du flux d'air entrant dans les poumons est d'environ 0,5 l/s. Ceci explique en partie pourquoi on modélise souvent le débit d'air $f(t)$ (en l/s) dans les poumons par la fonction de t (en s) :

$$f(t) = \frac{1}{2}\sin(\frac{2\pi t}{5}). \tag{1}$$

a) Esquisser la courbe de f et indiquer où se situent les parties d'inspiration et d'expiration.

b) Utiliser ce modèle pour trouver le volume (en l) d'air dans les poumons après une phase complète d'inspiration.

c) Quelle quantité d'air a été inspirée en une minute ?

Exercice 25 Lors d'un prélèvement sanguin le débit du sang, mesuré en ml/h, varie en fonction du temps t, en heures, selon la formule :

$$D(t) = \frac{K}{(t+1)(t+2)}.$$

a) Déterminer deux constantes A et B telles que $\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$.

b) En sachant que pour un prélèvement qui dure a heures la volume prélevé est

$$V(a) = \int_0^a D(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Montrer que $V(a) = K\ln\left(\frac{2a+2}{a+2}\right)$.

c) On estime que le volume sanguin du corps humain est en moyenne de 70 ml/kg. En considèrant que pour un temps très long on peut prélever la totalité du sang, déterminer la constante K pour un homme de 80 kg.

d) Quelle est la quantité de sang prélevé en 10 minutes pour un individu de ce poids ?

Exercice 26 Pour étudier le flux dans un vaisseau sanguin, on peut modéliser le vaisseau par un tube cylindrique de rayon R et de longueur l.

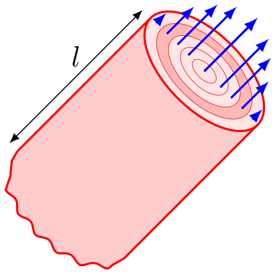
On désigne par $v(r)$ la vitesse du sang (en cm/s) en un point à distance r de l'axe central. On admet que le débit sanguin total F est donné par l'intégrale

$$F = \int_0^R 2\pi r v(r) dr. \tag{1}$$

a) Calculer F lorsque l'on suppose $v(r) \equiv v$ constante sur $[0, R]$. Expliquer pourquoi le débit trouvé est le produit de la vitesse v multipliée par la section du vaisseau sanguin.

A cause du frottement contre les parois du tube, la vitesse du sang est maximale au centre du vaisseau et est nulle au niveau des parois. La vitesse en un point à distance r de l'axe central est donnée (en cm/s) par

$$v(r) = \frac{P}{4\eta l}(R^2 - r^2) \qquad (2)$$



où P est la différence de pression entre les deux extrémités du tube et η la viscosité du sang.

a) Calculer le débit à partir de (1) en utilisant l'expression (2) de $v(r)$. Cette expression de F est appelée la loi de Poiseuille.

b) L'hypertension est due au rétrécissement des artères. Pour maintenir le même débit, le coeur doit pomper plus fort, ce qui augmente la pression sanguine. Utiliser la loi de Poiseuille pour montrer que si R_0 et P_0 sont les valeurs normales du rayon et de la pression, R et P les valeurs lors de l'hypertension, alors conserver le même débit sanguin impliquera la relation

$$\frac{P}{P_0} = (\frac{R_0}{R})^4. \qquad (3)$$

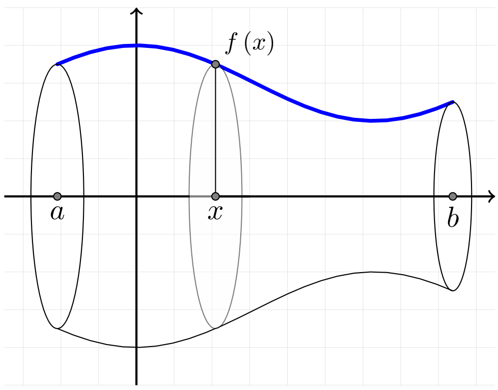
En déduire que si le rayon de l'artère est réduit aux trois quarts de sa valeur normale, la pression sanguine a plus que triplé.

Longueur, aire, volume

Exercice 27

On cherche à calculer le volume d'un objet dont la forme est obtenue par rotation d'une courbe d'équation $y = f(x)$ (pour $x \in [a, b]$, f une fonction continue) autour de l'axe des x. On admet que le volume de l'objet est donné par l'intégrale

$$V = \int_a^b \pi f(x)^2 dx. \qquad (1)$$



a) Soit f une fonction constante (pour tout $x \in [a; b]$, $f(x) = c > 0$). Quelle est la forme de l'objet obtenu ? La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

b) Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = kx$ ($k \neq 0$) pour x entre 0 et $b > 0$. Retrouver ainsi le volume d'un cône de rayon r et de hauteur h.

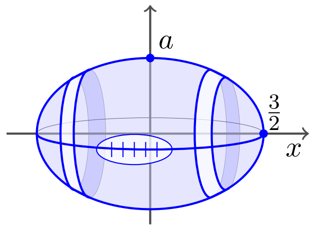
c) Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = \cos(x)$ entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$ (*indication :* $\cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}$).

d) Calculer le volume de l'objet défini par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = e^{-x}$ pour $x \geq 0$.

Exercice 28 On considère un ballon de longueur 3 dm (décimètres), de rayon équatorial $a > 0$.

Lorsque $a = \frac{3}{2}$, le ballon est une sphère.

Lorsque $a < \frac{3}{2}$, cela signifie que l'on a comprimé le ballon orthogonalement à l'axe des abscisses (Ox) pour obtenir un ballon ellipsoïdal.



a) On obtient un tel balon par rotation autour de l'axe Ox de la fonction

$$r(x) = a\sqrt{1 - \frac{4x^2}{9}}.$$

(i) Déterminer le domaine de définition de la fonction r.

(ii) Établir le tableau de variations de la fonction r sur son domaine de définition. Préciser les valeurs de $r(-\frac{3}{2})$, $r(0)$ et $r(\frac{3}{2})$.

(iii) Donner l'aire d'un disque de rayon $r(x)$ en fonction de a et x.

b) On cherche à calculer maintenant le volume du ballon.

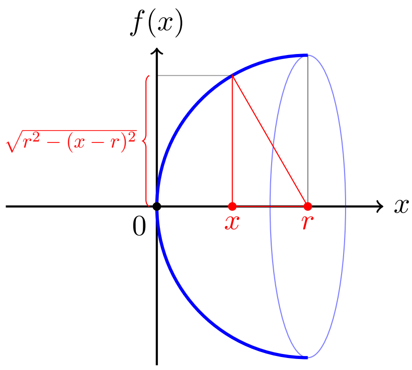
On rappelle que le volume du ballon est donné par l'intégrale

$$V = \int_{-3/2}^{3/2} \pi r(x)^2 \mathrm{d}x$$

(i) Calculer V en fonction du paramètre a.

(ii) En déduire en particulier que le volume d'un ballon sphérique de rayon $\frac{3}{2}$ dm vaut $\frac{9\pi}{2}$ dm^3.

Exercice 29 On remplit d'eau un bol hémisphérique, de rayon r (en cm).



Un tel bol est obtenu par rotation autour de l'axe x de la courbe représentant $f(x) = \sqrt{r^2 - (x-r)^2}$ pour $x \in [0, r]$.

a) Montrer que, s'il est rempli jusqu'à une hauteur h (en cm), le bol contient (en cm^3)

$$V(h) = \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h).$$

b) En déduire le volume d'eau que peut contenir le bol.

c) Écrire l'équation déterminant à quelle hauteur le bol sera à moitié plein.

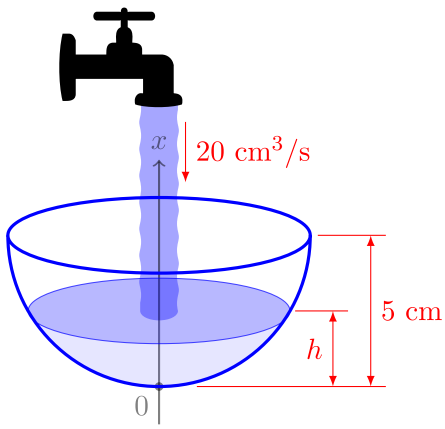
d) Le bol fait 5 centimètres de rayon et l'eau coule à un débit de 20 cm^3/s.

(i) Combien de temps faudra-t-il pour que la hauteur de l'eau passe de 2 centimètres à 4 centimètres ?

(ii) Soit $h(t)$ la hauteur (en cm) au temps t (en s). Montrer que

$$h'(t)(10\pi h(t) - \pi h^2(t)) = 20.$$

(iii) A quelle vitesse le niveau de l'eau monte-t-il s'il y a déjà 2 centimètres d'eau au fond ?



Exercice 30 Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$.

a) On admet que la longueur de la courbe d'équation $y = f(x)$ pour $x \in [a, b]$ est donnée par l'intégrale

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx. \tag{1}$$

(i) Soit f une fonction constante : pour $x \in [a, b]$, $f(x) = c$. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Soit f une fonction affine : pour $x \in [a, b]$, $f(x) = kx + c$. Tracer le graphe de f. La formule (1) donne-t-elle le résultat attendu ?

(iii) Calculer la longueur de la courbe d'équation $y = x^{\frac{3}{2}}$ pour $x \in [0, 1]$.

b) Soit f une fonction positive. On fait tourner la courbe d'équation $y = f(x)$ entre $x = a$ et $x = b$ autour de l'axe des x. On admet que l'aire de la surface ainsi obtenue est donnée par l'intégrale

$$A = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{(1 + f'(x)^2)}\, dx. \tag{2}$$

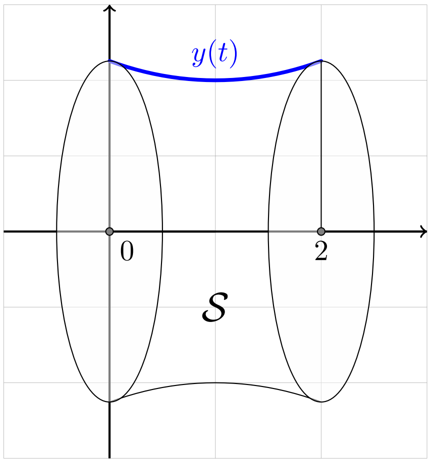
(i) Soit f une fonction constante. Quelle est la forme de l'objet obtenu ? La formule (2) donne-t-elle le résultat attendu ?

(ii) Mêmes questions pour $f(x) = kx$ $(k > 0)$ pour x entre 0 et 1.

(iii) Retrouver la formule de l'aire d'une sphère de rayon R.

Exercice 31 On considère le graphe $\mathcal{C}$ d'une fonction $y : [0,2] \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$y(0) = y(2) = e^{-1/2} + e^{1/2}. \qquad (1)$$



Soit

$$\mathcal{A}(y) = 2\pi \int_0^2 y(t)\sqrt{1 + (y'(t))^2}\, dt \qquad (2)$$

l'aire de la surface de révolution $\mathcal{S}$ engendrée par $\mathcal{C}$ par rotation autour de l'axe des abscisses x. La théorie du calcul variationnel (équations d'Euler Lagrange) montre que lorsque cette aire est minimale, alors il existe un nombre réel α tel que pour tout $x \in [0,2]$

$$y(x)\sqrt{1 + (y'(x))^2} - \frac{(y'(x))^2 y(x)}{\sqrt{1 + (y'(x))^2}} = \alpha. \qquad (3)$$

a) Montrer que l'équation (3) implique que la fonction y satisfait l'équation différentielle

$$y^2(x) = \alpha^2(1 + (y'(x))^2) \qquad \text{pour } x \in [0,2]. \qquad (4)$$

b) Résoudre (4) lorsque $\alpha = 0$.

On suppose désormais $\alpha \neq 0$.

c) Vérifier que pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, la fonction

$$y(x) = \alpha \frac{e^{\frac{x-\beta}{\alpha}} + e^{-\frac{x-\beta}{\alpha}}}{2} \qquad (5)$$

est solution de (4) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

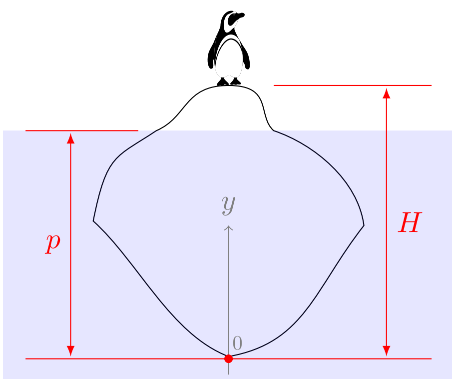
d) Déterminer α et β de sorte que la fonction $y(x)$ donnée par (5) satisfasse les contraintes (1) puis donner le tableau de variation de la fonction y. Montrer en particulier que la fonction y admet un unique minimum sur $[0,2]$ que l'on précisera.

e) Soit $y(x)$ la fonction définie par (5) avec α et β précédament détérminés. Calculer la surface $\mathcal{A}(y)$.

Exercice 32

Le principe d'Archimède dit que la force s'exerçant sur un objet partiellement ou totalement immergé dans un liquide est égale au poids du liquide que l'objet déplace.

Soit un objet de densité ρ_0 et de hauteur totale H partiellement immergé à une profondeur p sous la surface d'un liquide de densité ρ_l. On considère l'origine $y = 0$ de l'axe verticale placé au point le plus bas de l'objet.



a) On admet que le volume de l'objet situé sous une hauteur $h \in [0, H]$ est donné par la formule $\int_0^h A(y)dy$, où $A(y)$ est la surface de la section horizontale de l'objet à la hauteur y. Cela est-il justifié, si l'objet est, par exemple, un cube, ou un cylindre vertical ?

b) Justifier que la force de la gravité exercé sur l'objet est $F = \rho_0 g \int_0^H A(y)dy$, où g est l'accélération due à la gravité.

c) Que représente $P = \rho_l g \int_0^p A(y)dy$ et pourquoi $P = F$ pour un objet en équilibre ?

d) Montrer que le pourcentage de l'objet (en volume) au-dessus de la surface du liquide est donné par
$$100\frac{\rho_l - \rho_0}{\rho_l}.$$

e) La densité de la glace est 917 kg/m^3 et la densité de l'eau de mer est 1030 kg/m^3. Quel pourcentage d'un iceberg se situe au-dessus de la surface de l'eau ?

f) Un cube de glace flotte dans un verre d'eau rempli à ras bord. L'eau débordera-t-elle lorsque le cube de glace aura fondu ?

Résolution d'équations différentielles au moyen des primitives

Exercice 33 Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$x'(t) = (\alpha - 2t - 1)x(t) \quad (1)$$
$$x(0) = x_0 > 0 \quad (2)$$

a) Quelle est la primitive (à constante près) de $\frac{x'(t)}{x(t)}$ et celle de $\alpha - 2t - 1$? Déduire que si $x(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a $\ln|x| = \alpha t - t^2 - t + C$.

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale x_0.

c) Extraire la valeur de x comme fonction de t.

Exercice 34 Reprenons le problème déjà rencontré dans la première partie :

$$y'(t) = -K\, y(t)\, (1 - y(t)) \quad (1)$$
$$y(0) = y_0 \text{ avec } 0 < y_0 < 1 \quad (2)$$

a) Calculer la primitive (à constante près) de
$$\frac{y'(t)}{y(t)(1 - y(t))}.$$
Déduire que si $y(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a
$$\ln|\frac{y}{1-y}| = -Kt + C.$$

b) Déterminer la constante C en fonction de la valeur initiale y_0.

c) Extraire la valeur de y comme fonction de t.

Exercice 35

Considéronss le problème :

$$\begin{aligned} \frac{y'(t)}{y(t)+1} &= \frac{t}{t^2+1} \qquad (1) \\ y(0) &= 0 \qquad (2) \end{aligned}$$

a) Calculer la primitive (à constante près) de

$$\frac{y'(t)}{y(t)+1} \quad \text{et de} \quad \frac{t}{t^2+1}.$$

Déduire que si $y(t)$ est solution de l'équation différentielle, on a $\ln|y+1| = \frac{1}{2}\ln(t^2+1)+C$.

b) Déterminer la constante C pour que $y(0)=0$.

c) Extraire la valeur de y comme fonction de t.