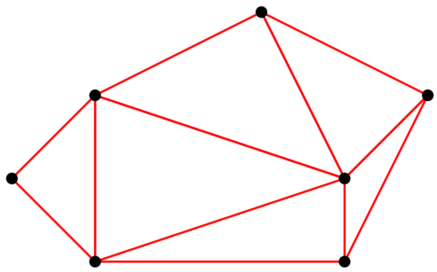
Triangulation

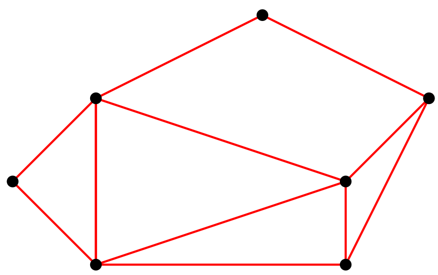
Lorsque l'on a une surface, il est utile de la découper en petites zones simples afin de traiter chaque zone individuellement, par exemple pour la colorier ou lui appliquer une texture. Nous allons voir comment découper une région du plan en triangles.

Activité 1 (Triangulation)**.**
Trianguler un ensemble de points du plan, c'est relier ces points par des segments de façon à former des triangles. Les points seront appelés les *sommets*. Il faut néanmoins respecter quelques règles :

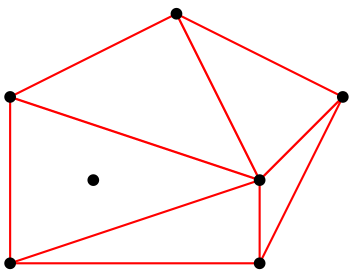
(a) Les seuls polygones autorisés sont des triangles.
(b) Tous les sommets doivent faire partie d'au moins un triangle.
(c) La triangulation est convexe.



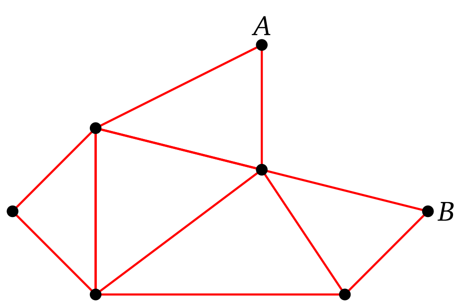
Triangulation



Condition (a) non respectée
(il y a un quadrilatère)

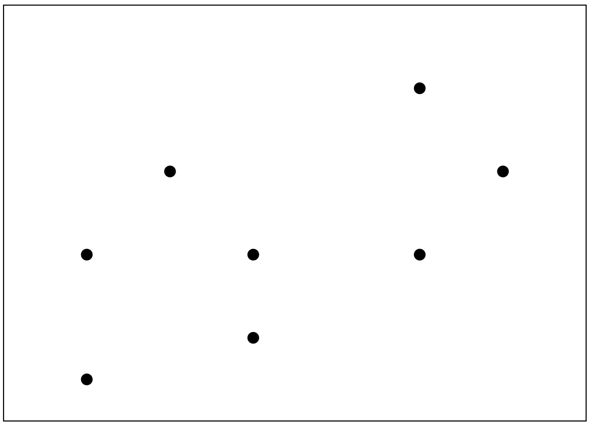


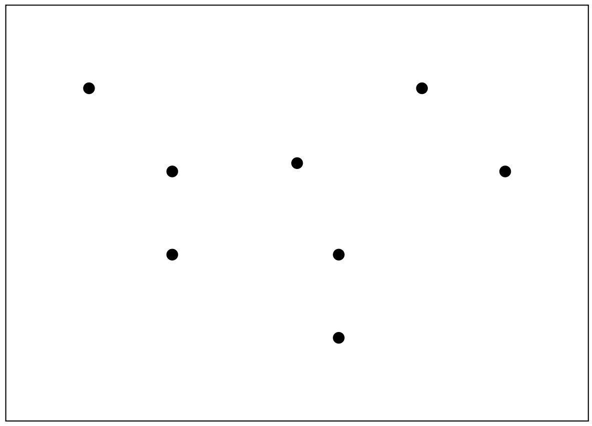
Condition (b) non respectée
(un point est isolé)



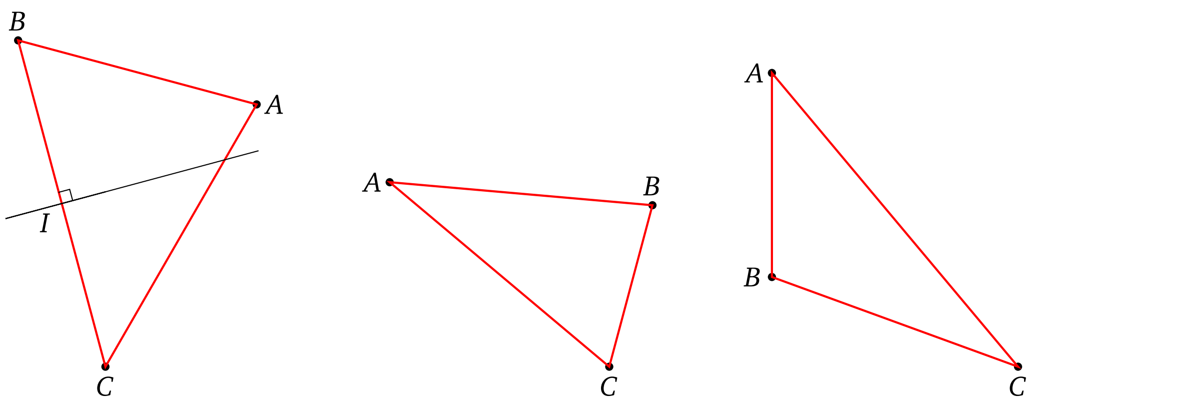
Condition (c) non respectée
(le contour n'est pas convexe, car le segment $[AB]$ n'est pas dans la triangulation)

Dessine des triangulations pour les ensembles de sommets suivants (plusieurs solutions sont possibles) :

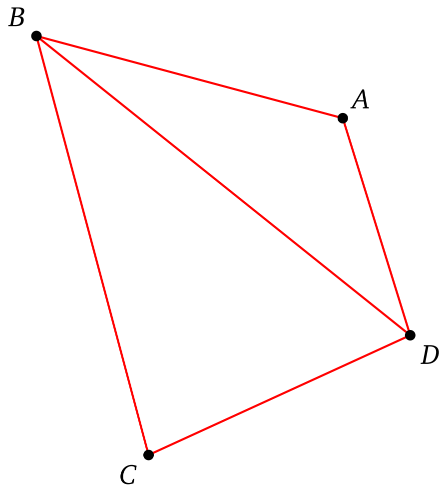


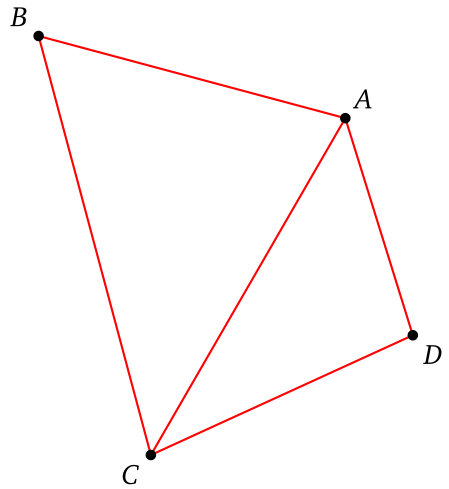


Activité 2 (Un triangle).
Pour les triangles ABC suivants, trace :
- les trois médiatrices,
- le point O d'intersection de ces médiatrices,
- le cercle circonscrit au triangle ABC (c'est-à-dire le cercle de centre O passant par A, B et C).



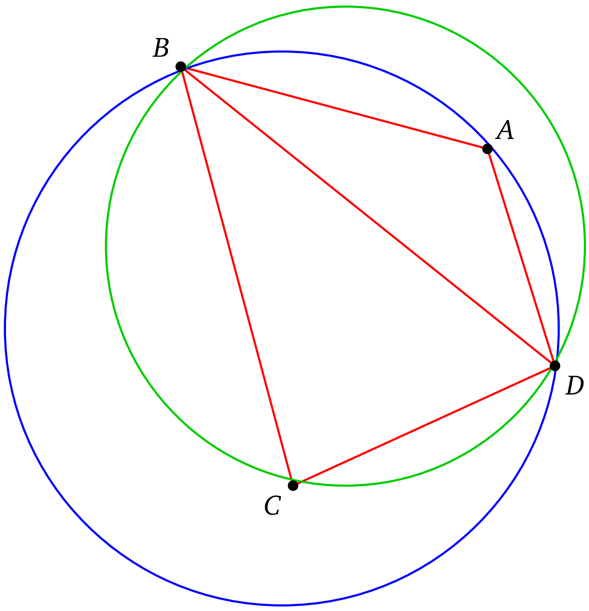
Activité 3 (Deux triangles).
Soit $ABCD$ un quadrilatère. Il existe deux triangulations possibles. Soit avec les triangles ABD et BCD ; soit avec les triangles ABC et CDA. Nous allons privilégier une configuration par rapport à l'autre.

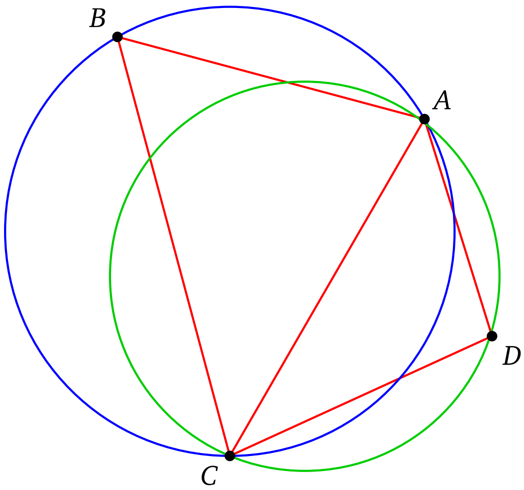




Proposition. *Dans l'une des deux triangulations possibles d'un quadrilatère, les deux cercles circonscrits aux triangles ne contiennent dans leur intérieur aucun sommet.*

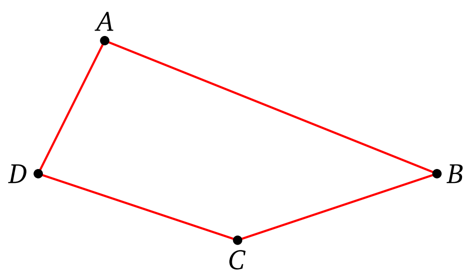
Sur la triangulation de gauche, le cercle circonscrit au triangle BCD (en vert) contient le point A. Sur la triangulation de droite, les intérieurs des deux cercles circonscrits ne contiennent aucun sommet. C'est cette triangulation de droite qui valide la proposition.

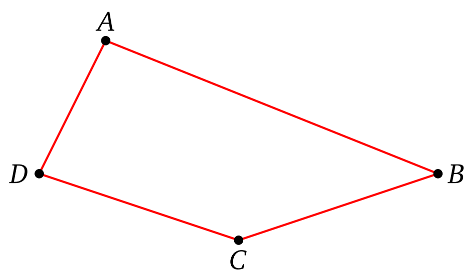


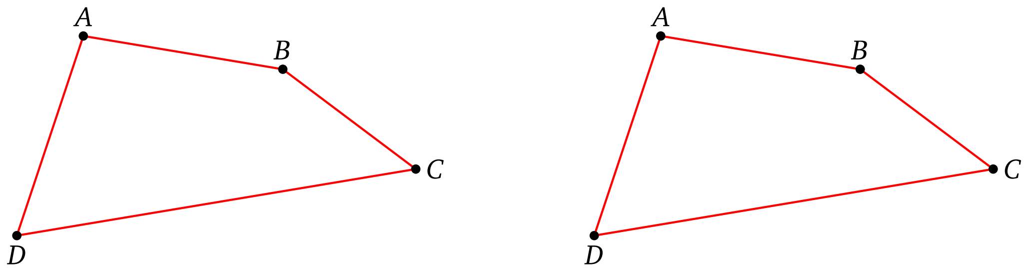


De plus, si les 4 sommets ne sont pas sur un même cercle, alors il n'y a qu'une seule des deux triangulations qui valide cette proposition.

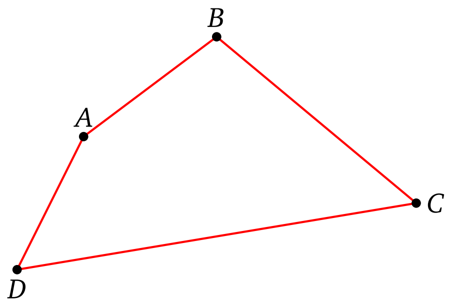
1. Pour les quadrilatères suivants dessine les deux triangulations, les cercles circonscrits et décide quelle est la triangulation qui valide la proposition.

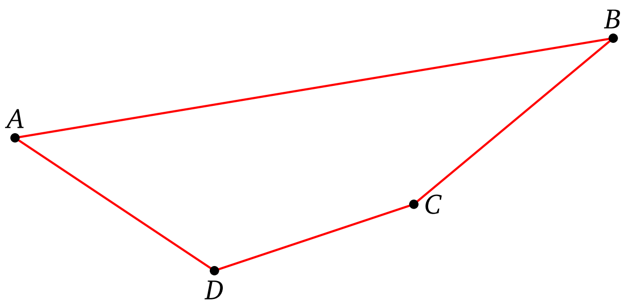






2. Pour les quadrilatères suivants, dessine la triangulation qui valide la proposition.



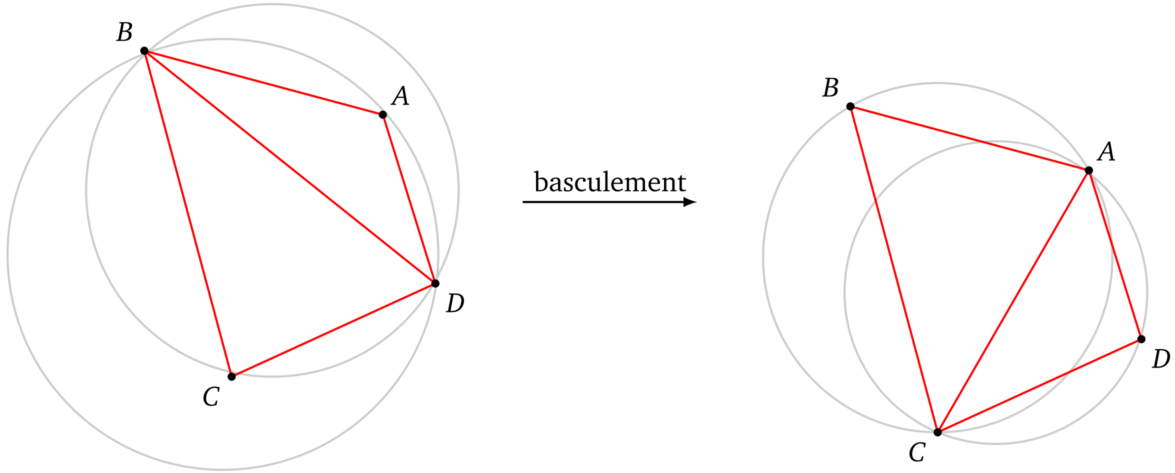


3. Que se passe-t-il dans le cas très particulier où les 4 points sont sur un même cercle ? (On pourra prendre l'exemple d'un rectangle.)

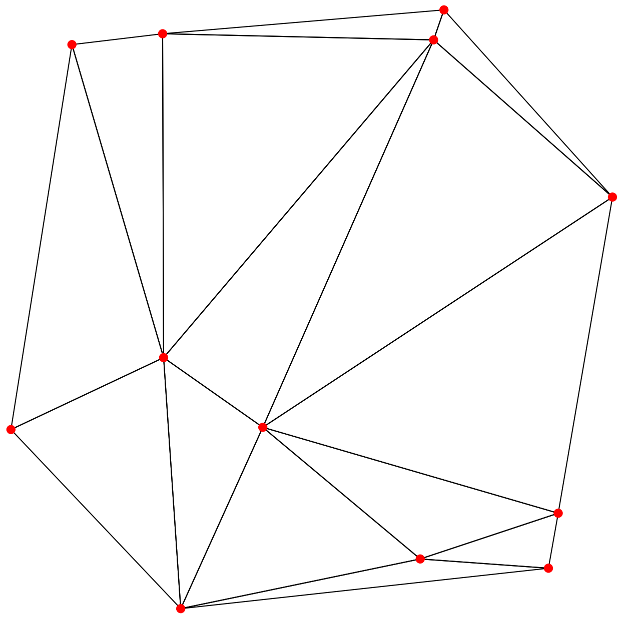
Activité 4 (Triangulation de Delaunay).

> **Définition.** *Une triangulation est dite* triangulation de Delaunay *si les intérieurs des cercles circonscrits ne contiennent pas de sommets.*

Ci-dessous à gauche, la triangulation n'est pas du type Delaunay (le point A est à l'intérieur d'un cercle et le point C également). Par contre la triangulation de droite est une triangulation de Delaunay.



Les angles des triangles d'une triangulation de Delaunay sont les moins aigus possibles. Voici un exemple.



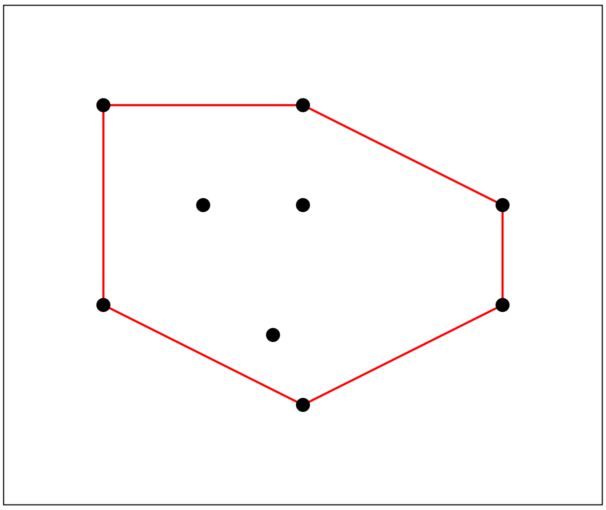
Lorsque qu'il y a 4 sommets situés sur un même cercle, alors deux triangulations de Delaunay sont possibles. Mais si ce n'est pas le cas, alors :

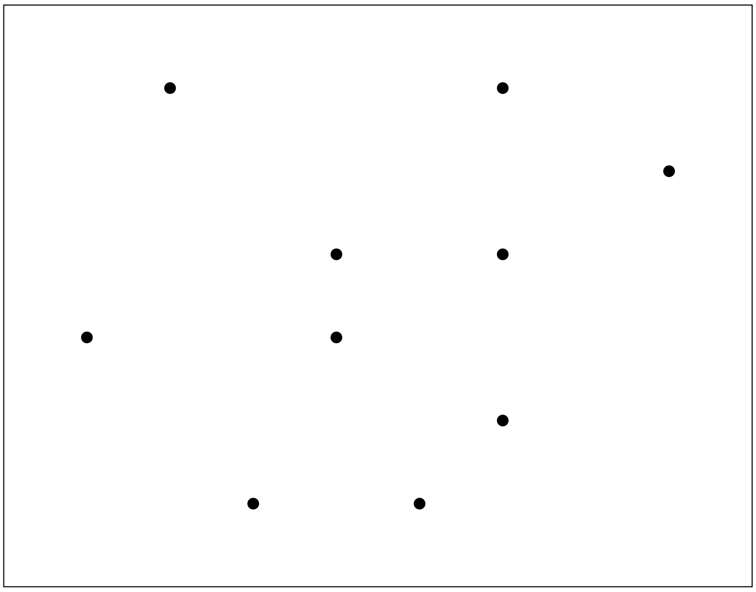
Proposition. *Une triangulation de Delaunay existe toujours et est unique.*

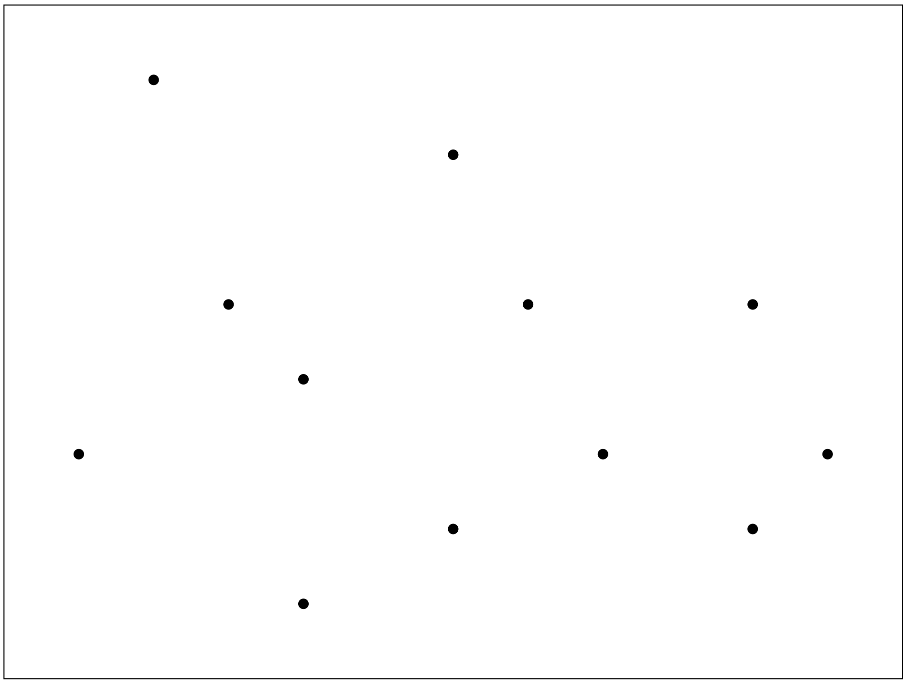
Algorithme. *Pour obtenir une triangulation de Delaunay :*

- *partir d'une triangulation quelconque ;*
- *chaque fois que l'on trouve un triangle dont le cercle circonscrit contient en son intérieur un sommet, on effectue un basculement comme dans le cas du quadrilatère étudié précédemment.*

Dans la pratique, on commence par tracer le contour, on trace des triangles ayant les angles les moins aigus possibles (même si on ne peut pas vraiment les éviter sur les bords). Si on a un doute sur un triangle, on trace le cercle circonscrit ; si ce cercle contient un sommet en son intérieur, on effectue un basculement.
Trace les triangulations de Delaunay pour les ensembles de sommets suivants.



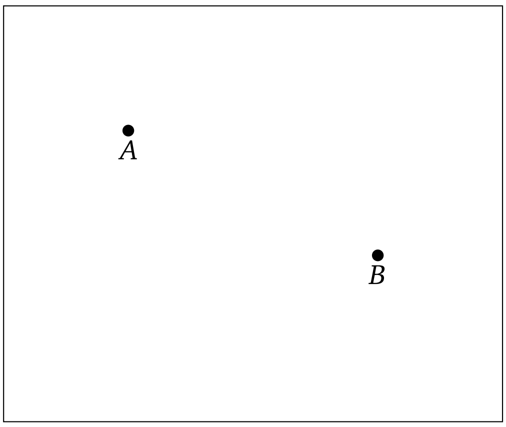




Activité 5 (Cellules de Voronoï).

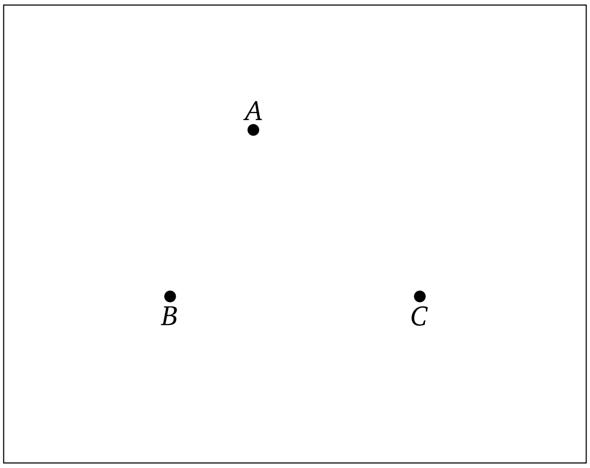
1. Deux princesses, vivant dans des châteaux A et B, revendiquent un territoire. Elles se mettent d'accord sur le principe suivant : « Je possède les terres qui sont plus proches de mon château que du tien. »

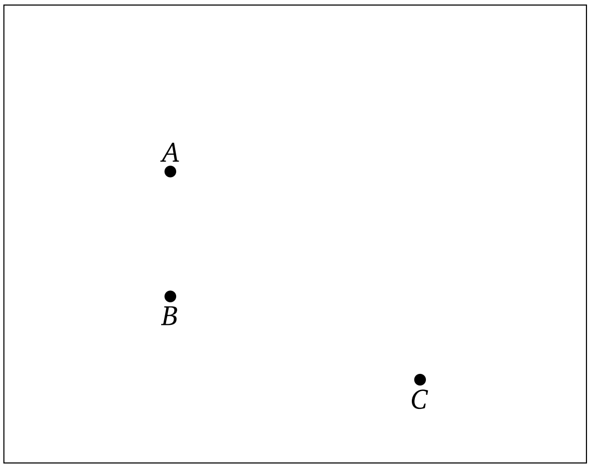
   Dessine les territoires de chacune des princesses.



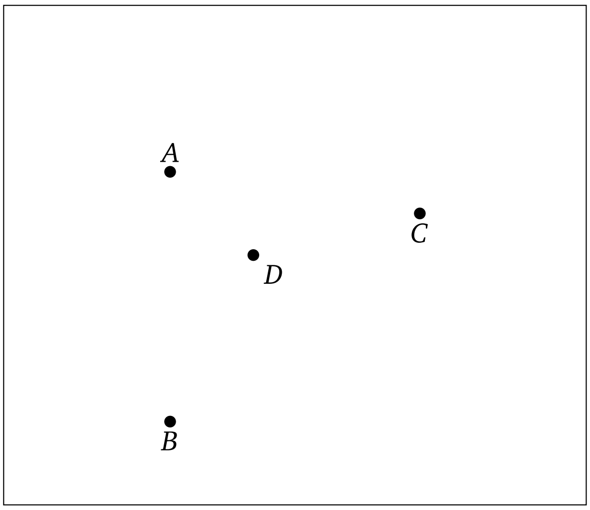
2. Il y a maintenant 3 princesses. Chacune possède les terres qui sont plus proches de son château que d'un autre château.

   Dessine les territoires de chacune des princesses.

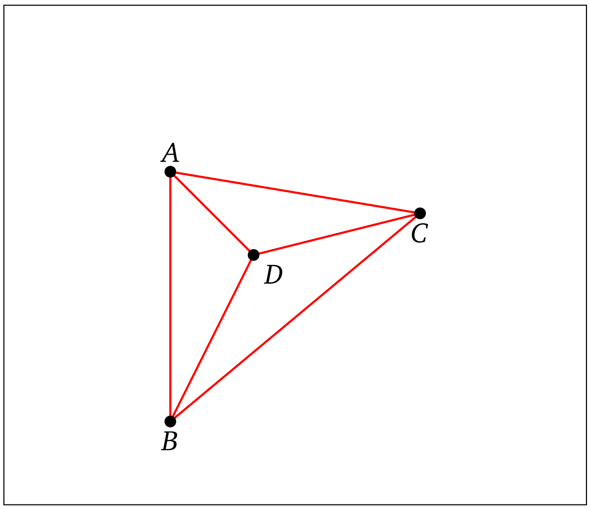




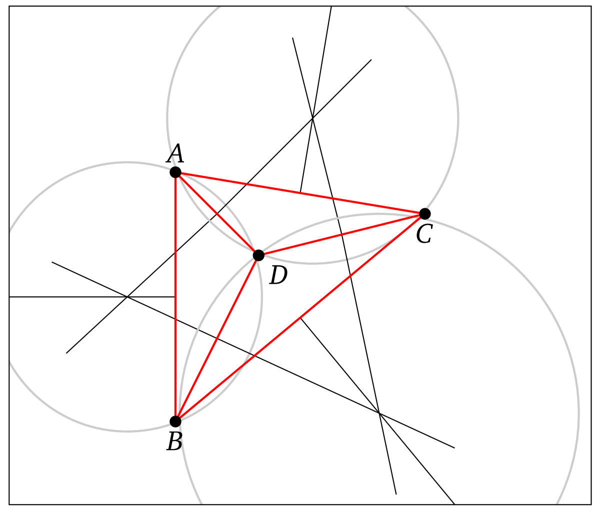
3. Il y a maintenant plein de princesses ! Voici une méthode pour tracer les territoires de chaque princesse, appelés *cellules de Voronoï*.
   - Trace la triangulation de Delaunay (où les sommets sont les châteaux).
   - Trace les médiatrices de chaque triangle et le centre du cercle circonscrit.
   - Les cellules de Voronoï sont délimitées par des portions de médiatrices.



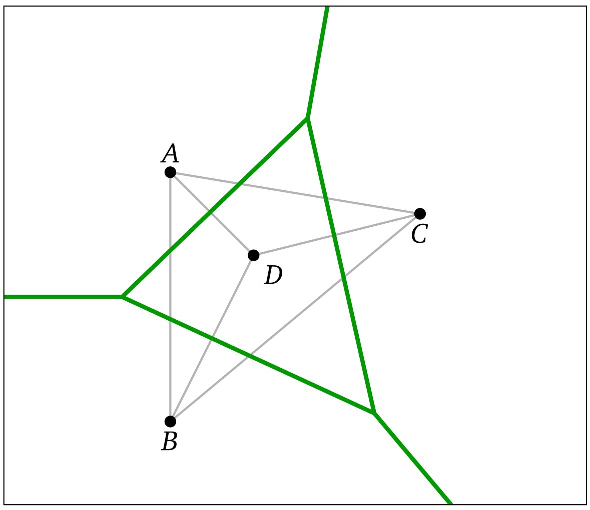
(a) Les sommets.



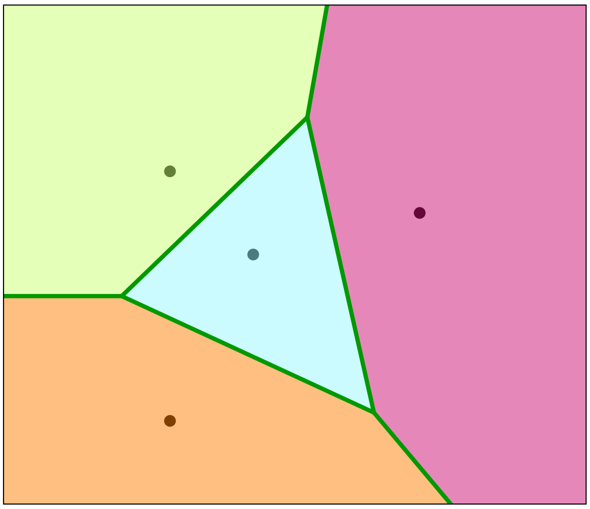
(b) La triangulation.



(c) Les médiatrices.

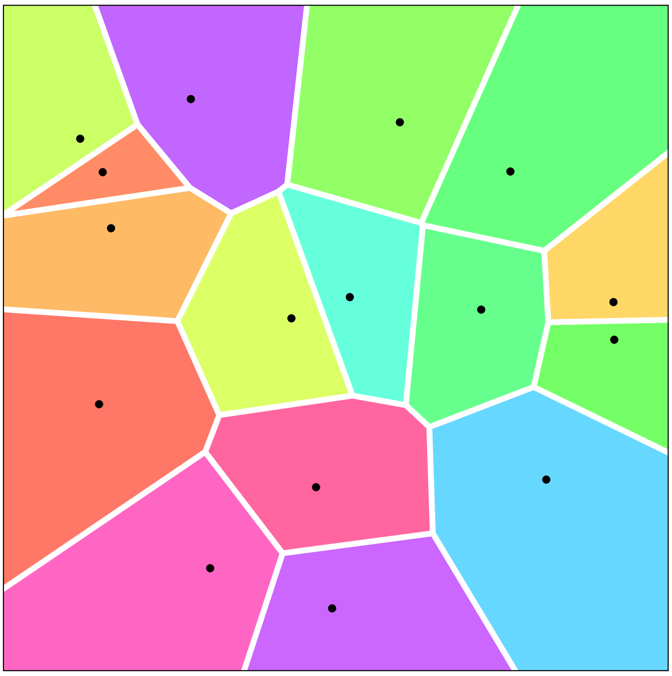


(d) Les arêtes.

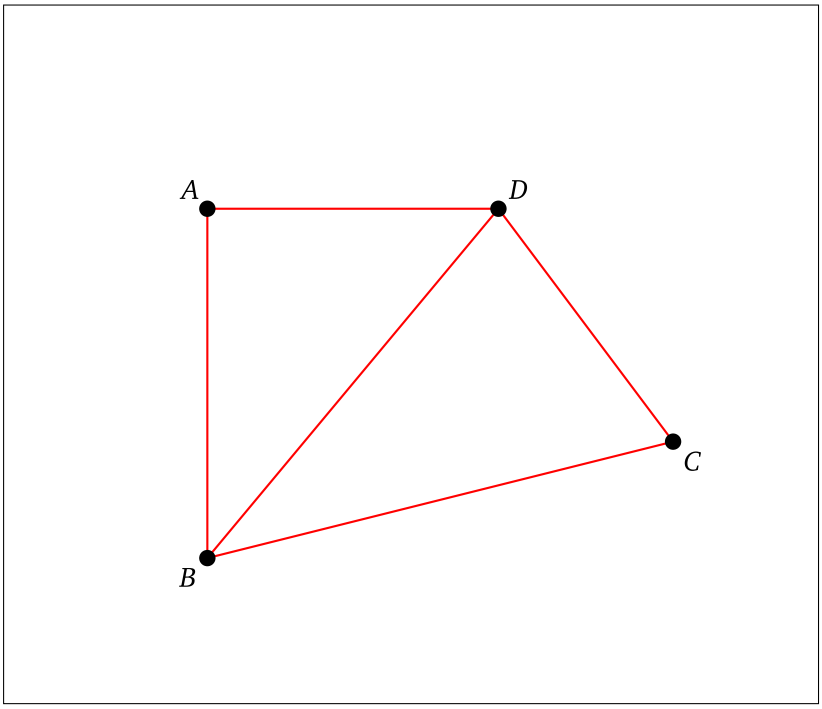


(e) Les cellules de Voronoï.

Voici ce que l'on obtient avec un exemple plus compliqué.



Trace les cellules de Voronoï des configurations suivantes.


A
D
C
B