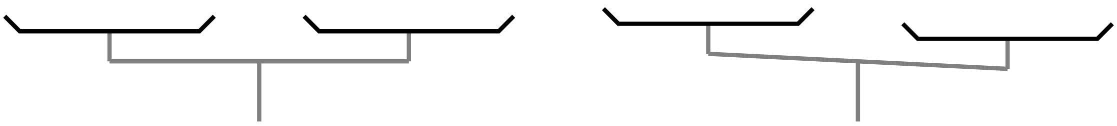
Diviser pour régner

Divide et impera : divise et tu régneras ! Il s'agit de séparer un problème compliqué en plusieurs tâches simples, que l'on traite une à une ou bien en même temps.

Activité 1 (L'attaque des zombies)**.**

1. Tu es le dernier humain dans une ville envahie par 127 zombies. Heureusement tu as concocté suffisamment d'antidotes pour tous les sauver. Il faut 5 minutes pour attraper un zombie, le ligoter, lui faire avaler l'antidote, qu'il redevienne un gentil humain, soit libéré et prêt à t'aider. Au bout de combien de temps n'y aura-t-il plus de zombies ?
2. Tu as fabriqué 1024 boîtes d'antidotes. Malheureusement, tu te rends compte que l'une d'entre elles n'a pas la bonne formule et que son utilisation risque de compromettre ta mission. Heureusement, la mauvaise boîte pèse plus lourd que les autres. Pour la trouver, tu disposes d'une grande balance mais de très peu de temps. Combien de pesées sont nécessaires pour trouver la boîte recherchée ?

   Sur la figure de gauche, on a placé le même poids sur le plateau de gauche et celui de droite : la balance est à l'équilibre. Sur la figure de droite, le poids sur le plateau de droite est plus lourd : la balance penche vers la droite.



Activité 2 (Le jeu des devinettes)**.**
Tu connais le jeu des devinettes : l'ordinateur tire au hasard un nombre entre 0 et 64. Le joueur propose un nombre et l'ordinateur répond « le nombre à trouver est plus grand » ou « le nombre à trouver est plus petit » jusqu'à ce que le joueur trouve le bon nombre.
J'adopte la stratégie suivante : je commence par proposer le nombre 32 (au milieu entre 0 et 64). Ensuite (si ce n'est pas le bon nombre), je propose ou bien le milieu entre 0 et 32 ou bien le milieu entre 32 et 64. Je recommence jusqu'à trouver le bon nombre.

1. Avec cette stratégie, quels sont les nombres pour lesquels je vais gagner en 2 propositions ? Et en 3 propositions ?
2. De combien de propositions aurais-je besoin au maximum ? Quels sont les nombres qui

nécessitent le maximum de propositions ?

3. Si je devais deviner un nombre entre 0 et 1 024 avec le même principe, de combien de propositions aurais-je besoin au maximum ?

Activité 3 (Les balles de verre)**.**
Pour tester des balles faites avec un nouveau verre très solide, je les lance depuis les étages d'un gratte-ciel de 100 étages (numérotés de 1 à 100). Je veux savoir exactement à partir de quel étage ce type de balle se brise. Par exemple, si la balle ne se brise pas lorsqu'elle est lâchée du 17^{e} étage, je peux ensuite tenter de la lâcher depuis le 22^{e}, si elle se brise c'est que l'étage cherché est l'un des suivants : 18, 19, 20, 21 ou 22.

1. Si je dispose d'une seule balle. Il n'y a qu'une seule stratégie pour être sûr de déterminer à partir de quel étage la balle éclate. Quelle est cette stratégie ? Combien de fois dois-je lancer la balle dans le pire des cas ?
2. Si je dispose maintenant de deux balles parfaitement identiques. Lorsque la première est brisée, j'utilise la seconde. Cherche une stratégie qui permet de détecter à partir de quel étage exactement les balles se brisent. Trouve d'abord une stratégie qui utilise moins de 20 lâchers (quel que soit l'étage où les balles se brisent). Sauras-tu trouver une stratégie à moins de 18 lâchers ?

Activité 4 (La multiplication fantastique de Karatsuba)**.**
Première partie. La multiplication habituelle.
Voici comment on calcule habituellement le produit de deux nombres à deux chiffres. Prenons par exemple 75×43 :

- Tout d'abord, on écrit $75 = 7 \times 10 + 5$ et $43 = 4 \times 10 + 3$.
- Ensuite on développe le produit :

$$75 \times 43 = (7 \times 10 + 5) \times (4 \times 10 + 3) = 7 \times 4 \times 100 \; + \; (7 \times 3 + 5 \times 4) \times 10 \; + \; 5 \times 3$$

- Comptons le nombre de multiplications qu'il y a à faire. On ne va pas compter les multiplications du type $\times 10$ ou $\times 100$. En effet, multiplier un nombre par 10, 100, 1000... ne nécessite aucun effort. Par exemple 123×10 c'est 1 230, il suffit de placer un zéro à droite du nombre. Pour 123×100, on en place deux.
- Au final, nous avons donc besoin de calculer 7×4, 7×3, 5×4 et 5×3.
- La formule générale est :

$$\boxed{(a \times 10 + b) \times (c \times 10 + d) = \underbrace{a \times c}_{\boxed{1}} \times 100 \; + \; (\underbrace{a \times d}_{\boxed{3}} + \underbrace{b \times c}_{\boxed{4}}) \times 10 \; + \; \underbrace{b \times d}_{\boxed{2}}}$$

Conclusion : pour multiplier deux nombres ayant deux chiffres, il faut 4 multiplications de nombres à un seul chiffre (et quelques additions).

1. Termine les calculs précédents et vérifie à la calculatrice.
2. Utilise la formule précédente pour calculer 14×32 ; 23×61 ; 85×27.
3. Adapte la formule précédente pour transformer une multiplication de deux nombres à 4 chiffres en 4 multiplications de nombres à 2 chiffres : fais-le avec $1\,234 \times 5\,041$ en commençant

par écrire $1\,234 = 12 \times 100 + 34$ et $5\,041 = 50 \times 100 + 41$.

Seconde partie. La multiplication de Karatsuba.
La méthode de Karatsuba est basée sur le fait que :

$$(a+b)\times(c+d) = a\times c + b\times d + (a\times d + b\times c)$$

et donc :

$$\boxed{(a\times 10+b)\times(c\times 10+d) = \underbrace{a\times c}_{\boxed{1}}\times 100 \;+\; \Big(\underbrace{(a+b)\times(c+d)}_{\boxed{3}} - \underbrace{a\times c}_{\boxed{1}} - \underbrace{b\times d}_{\boxed{2}}\Big)\times 10 \;+\; \underbrace{b\times d}_{\boxed{2}}}$$

Bilan : il n'y a que 3 multiplications (plus simples) à effectuer :
- $\boxed{1}$: $a \times c$
- $\boxed{2}$: $b \times d$
- $\boxed{3}$: $(a+b)\times(c+d)$

Ce qui permet de calculer sans multiplication supplémentaire :
- $\boxed{3'}$: $(a+b)\times(c+d) - a\times c - b\times d$ (qui vaut donc $a\times c + b\times d$).

Reprenons l'exemple de 75×43.
- Tout d'abord $75 \times 43 = (7\times 10+5)\times(4\times 10+3)$, on calcule donc :
- $\boxed{1}$: 7×4
- $\boxed{2}$: 5×3
- $\boxed{3}$: $(7+5)\times(4+3)$, on remarque que les entiers (somme d'entiers à 1 chiffre) pouvant intervenir dans cette multiplication sont compris entre 1 et 18 (ici 12×7), il ne s'agit donc pas à proprement parler d'une multiplication à 1 chiffre (mais on continuera à dire « multiplication à 1 chiffre »).
- Ce qui donne sans multiplication supplémentaire $\boxed{3'}$: $(7+5)\times(4+3) - 7\times 4 - 5\times 3$.
- Et ensuite :

$$75 \times 43 = 7\times 4\times 100 + \Big((7+5)\times(4+3) - 7\times 4 - 5\times 3\Big)\times 10 + 5\times 3.$$

1. Termine les calculs précédents et vérifie le résultat avec la première partie.
2. Utilise la méthode de Karatsuba pour calculer 14×32 ; 23×61 ; 85×27.
3. Adapte la formule pour calculer $1\,234 \times 5\,041$ à l'aide de 3 multiplications à 2 chiffres.

Troisième partie. Karatsuba itéré.
Bien sûr, passer de 4 à 3 multiplications est un gain important lorsque qu'un ordinateur doit faire des millions de multiplications. Mais l'intérêt principal est d'itérer le processus lorsque l'on fait des calculs avec des grands nombres. Par exemple, pour multiplier deux nombres à 4 chiffres :
- avec la méthode habituelle :

1 multiplication à 4 chiffres $\longrightarrow$ 4 « multiplications à 2 chiffres » $\longrightarrow$ 4×4 « multiplications à 1 chiffre »

  donc au total 16 multiplications à 1 chiffre.
- avec Karatsuba itéré :

1 multiplication à 4 chiffres $\longrightarrow$ 3 « multiplications à 2 chiffres » $\longrightarrow$ 3×3 « multiplications à 1 chiffre »

  donc au total 9 « multiplications à 1 chiffre ».

1. Calcule $1\,234 \times 5\,041$ à l'aide de 9 « multiplications à 1 chiffre ».
2. Calcule $2\,019 \times 1\,021$ et $4\,107 \times 6\,830$.
3. Calcule si tu es courageux : $10\,206\,004 \times 23\,013\,011$.