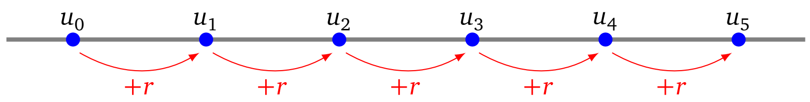
Suites arithmétiques – Suites géométriques

Tu vas manipuler deux types de suites fondamentales : les suites arithmétiques et les suites géométriques.

Cours 1 (Suites arithmétiques).

Une suite arithmétique est une suite telle que la différence entre deux termes consécutifs ait toujours la même valeur.



1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite arithmétique*** de ***raison*** r si on a $u_{n+1} = u_n + r$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. **Formule de récurrence.** Une suite arithmétique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison r :

   $$\boxed{\begin{array}{c}\text{terme initial } u_0 \text{ et}\\ \text{formule de récurrence } u_{n+1} = u_n + r\end{array}}$$

3. **Formule directe.** On calcule u_n directement par la formule :

   $$\boxed{u_n = nr + u_0}$$

4. **Exemple.**

   $$7 \quad 10 \quad 13 \quad 16 \quad 19 \quad \ldots$$

   C'est la suite arithmétique de terme initial $u_0 = 7$ et de raison $r = 3$. La formule directe est $u_n = 3n+7$.
5. **Somme.** La somme des termes de u_0 jusqu'à u_n est donnée par la formule :

   $$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = (n+1)u_0 + \frac{n(n+1)}{2}r$$

Activité 1 (Suites arithmétiques).

Objectifs : programmer les différentes formules autour des suites arithmétiques.

1. Programme une fonction `arithmetique_1(n,u0,r)` qui renvoie le terme de rang n de la suite arithmétique définie par le terme initial u_0 et la raison r, en utilisant la formule de récurrence. Quel est le terme u_{100} de la suite arithmétique définie par $u_0 = 13$ et $r = 5$?
2. Programme une fonction `arithmetique_2(n,u0,r)` qui fait la même chose mais en utilisant cette

fois la formule directe.

3. Programme une fonction `liste_arithmetique(n,u0,r)` qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$.
4. Programme une fonction `est_arithmetique(liste)` qui teste si les termes $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$ de la liste donnée forment le début d'une suite arithmétique.

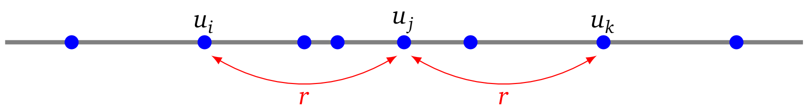
   Indications.
   - Le programme renvoie `True` ou `False`.
   - On suppose que la liste contient au moins deux éléments.
   - Si la liste est constituée des premiers termes d'une suite arithmétique alors, le terme initial est u_0 et la raison est $r = u_1 - u_0$. Et on doit avoir $u_{n+1} - u_n = r$ pour tout n. Tu peux alors utiliser la question précédente.
   - Exemple : avec $[3, 5, 7, 10]$ la fonction renvoie « Faux ».
5. Programme une fonction `somme_arithmetique_1(n,u0,r)` qui calcule, en additionnant les éléments, la somme des termes de rang 0 à n d'une suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r. Retrouve le même résultat par une fonction `somme_arithmetique_2(n,u0,r)` qui utilise la formule de la somme donnée dans le cours ci-dessus.

   Combien vaut la somme :
   $$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 1000 \ ?$$

Activité 2 (Trois termes d'une suite arithmétique)**.**

Objectifs : déterminer si dans une liste donnée il existe trois termes d'une suite arithmétique.

On te donne une liste ordonnée $[u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Tu dois déterminer si dans cette liste on peut trouver trois termes u_i, u_j, u_k qui font partie d'une suite arithmétique. Autrement dit, tels que :
$$u_i = u_j - r \quad u_k = u_j + r \quad \text{pour un certain } r.$$



Par exemple dans la liste :
$$[10, 11, 13, 17, 19, 20, 23, 29, 31]$$
les trois termes $u_i = 11$, $u_j = 17$, $u_k = 23$ sont en progression arithmétique, de raison $r = 6$.
Programme l'algorithme ci-dessous en une fonction `chercher_arithmetique(u)` qui à partir d'une liste de termes `u` renvoie trois termes en progression arithmétique (ou `None` s'il n'y en a pas).

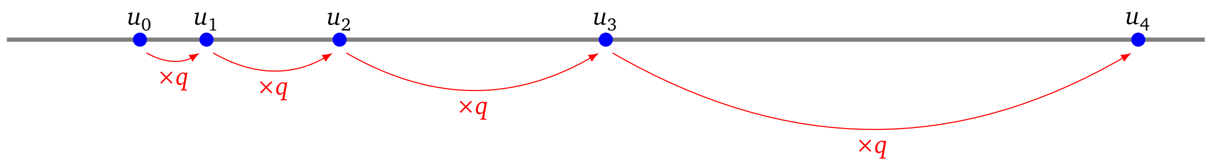
Le principe de l'algorithme est le suivant. Pour chaque élément u_j de la suite (qui va jouer le rôle du potentiel élément central) :
- On cherche un élément u_i de rang i plus petit que j et un élément u_k de rang k plus grand que j avec $u_j - u_i = u_k - u_j$ (on aura alors $u_j = u_i + r$ puis $u_k = u_j + r$). Si on a cette égalité alors c'est gagné !
- Si on n'a pas cette égalité alors on prend un i plus petit ou bien un k plus grand.

Algorithme.

- — Entrée : une liste de termes $[u_0, u_1, \dots, u_n]$ ordonnée.
  — Sortie : trois termes en progression arithmétique (ou rien s'il n'y en pas).
- Pour j parcourant les indices de 1 à $n-1$:
  — Poser $i = j-1$, $k = j+1$.
  — Tant que $i \geqslant 0$ et $k \leqslant n$:
    — Si $u_j - u_i = u_k - u_j$ renvoyer le triplet u_i, u_j, u_k (qui forme une progression arithmétique). Le programme s'arrête là avec succès.
    — Si $u_j - u_i < u_k - u_j$ alors faire $i \leftarrow i-1$.
    — Si $u_j - u_i > u_k - u_j$ alors faire $k \leftarrow k+1$.
- Lorsque la boucle « pour » se termine sans avoir obtenu de triplet, c'est qu'il n'y en a pas.

Cours 2 (Suites géométriques).

Pour une suite géométrique le quotient entre deux termes consécutifs est toujours le même.



1. **Définition.** Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une ***suite géométrique*** de ***raison*** q si on a $u_{n+1} = qu_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. **Formule de récurrence.** Une suite géométrique est donc entièrement définie par son premier terme u_0 et sa raison q :

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{terme initial } u_0 \text{ et}\\ \text{formule de récurrence } u_{n+1} = qu_n\end{array}}$$

3. **Formule directe.** On calcule u_n directement par la formule :

$$\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$$

4. **Exemple.**

$$2 \quad 6 \quad 18 \quad 54 \quad 162 \quad \dots$$

est le début de la suite géométrique de terme initial $u_0 = 2$, de raison $q = 3$. La formule directe est $u_n = 2 \times 3^n$.

5. **Somme.** La somme des termes de u_0 jusqu'à u_n (pour $q \neq 1$) est donnée par la formule :

$$\boxed{S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_0 \times \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

que l'on mémorise par :

$$\text{somme suite géométrique} = \text{terme initial} \times \frac{1 - \text{raison}^{\text{nombre de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

Activité 3 (Suites géométriques).

Objectifs : refaire la première activité sur les suites arithmétiques, mais cette fois pour les suites géométriques.

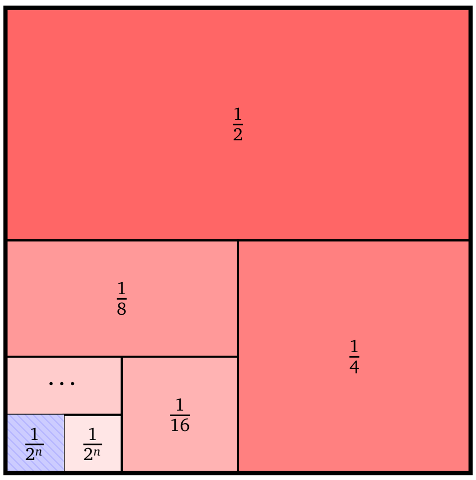
1. Programme une fonction `geometrique_1(n,u0,q)` qui renvoie le terme de rang n de la suite géométrique définie par le terme initial u_0 et la raison q, en utilisant la formule de récurrence. Quel est le terme u_{10} de la suite géométrique définie par $u_0 = 13$ et $r = 5$?
2. Programme une fonction `geometrique_2(n,u0,q)` qui fait la même chose mais en utilisant cette fois la formule directe.
3. Programme une fonction `liste_geometrique(n,u0,q)` qui renvoie la liste des termes $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$.
4. Programme une fonction `est_geometrique(liste)` qui teste si les termes $[u_0, u_1, u_2, \dots, u_n]$ de la liste donnée forment le début d'une suite géométrique.
   Indications. Si la liste est constituée des premiers termes d'une suite géométrique alors, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_1}{u_0}$ pour tout n. Utilise la question précédente.
5. Programme une fonction `somme_geometrique_1(n,u0,q)` qui calcule, en additionnant les éléments, la somme des termes de rang 0 à n d'une suite géométrique de terme initial u_0 et de raison q. Retrouve le même résultat par une fonction `somme_geometrique_2(n,u0,q)` qui utilise la formule de la somme donnée dans le cours ci-dessus.
   Vers quelle valeur a l'air de tendre la somme :
   $$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}$$
   lorsque n tend vers l'infini ?

Activité 4 (Tracer la somme d'une suite géométrique).

Objectifs : illustrer géométriquement la formule de la somme d'une suite géométrique.

Voici un découpage d'un carré de côté 1 qui illustre la formule :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

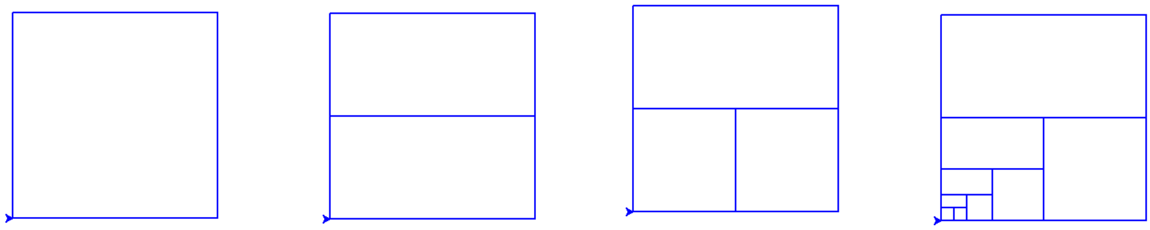


1. Programme une fonction `affiche_un_carre(longueur)` qui affiche un carré de la longueur donnée. Utilise la tortue accessible depuis le module `turtle`.

2. Programme une fonction `affiche_un_rectangle(longueur)` qui trace un rectangle de hauteur la moitié de sa longueur. Il coupe le carré précédent en deux parties égales.
3. Programme une fonction `affiche_les_carres(n)` qui construit notre figure.

   Indications.
   - Par exemple, on commence par tracer un carré de longueur 256,
   - on trace un rectangle qui coupe le carré en deux,
   - puis on trace un carré de longueur 128,
   - puis on le découpe en deux, etc.

De gauche à droite : le carré initial ; le carré coupé en deux rectangles ; un petit carré ; un découpage itéré.



Preuves de la formule.
On considère la suite :

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \cdots \quad \frac{1}{2^n} \quad \cdots$$

C'est la suite géométrique (u_n) de terme initial $u_0 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.
Preuve par le dessin.
Le grand carré a pour aire 1, l'aire totale des zones rouges est $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}$. La zone hachurée bleue a pour aire $\frac{1}{2^n}$. Les zones rouges et bleues recouvrent tout le carré, donc leur aire totale vaut 1. Ce qui prouve la formule annoncée :

$$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n}}_{\text{aire rouge}} \quad + \quad \underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\text{aire bleue}} \quad = \quad \underbrace{1}_{\text{aire du grand carré}}$$

Preuve par le calcul.
La formule pour la somme est

$$S_{n-1} = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} = u_0 \times \frac{1-q^n}{1-q}$$

(attention il y a bien n termes dans la somme) et donc ici :

$$S_{n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Activité 5 (Meilleure suite arithmétique).

Objectifs : on te donne une liste ordonnée, tu dois trouver la suite arithmétique qui approche le mieux possible cette liste.

Qu'est ce que la meilleure suite arithmétique qui approche une liste de nombres donnés ? Par exemple pour la liste $[3,6,9,11]$, on a envie de l'approcher par la progression arithmétique $[3,6,9,12]$.
On nous donne donc des termes $v_0, v_1, \ldots, v_n$ (ordonnés du plus petit au plus grand). On va chercher

une progression arithmétique $u_0, u_1, \ldots, u_n$ telle que

$$d = |v_0 - u_0| + |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + \cdots + |v_n - u_n|$$

soit le plus petit possible.

On appelle d la ***distance*** entre $[v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et $[u_0, u_1, \ldots, u_n]$. Pour l'exemple donné, $[3, 6, 9, 11]$ approchée par $[3, 6, 9, 12]$, la distance vaut 1.

1. **Distance.** Programme une fonction `distance(u,v)` qui calcule la distance

   $$d = |v_0 - u_0| + |v_1 - u_1| + |v_2 - u_2| + \cdots + |v_n - u_n|$$

   entre deux listes $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$ et $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$.

2. **Meilleure constante.** On nous donne une liste $w = [w_0, w_1, \ldots, w_n]$, on cherche une constante m qui approche au mieux toutes les valeurs de la liste, c'est-à-dire telle que

   $$d = |w_0 - m| + |w_1 - m| + |w_2 - m| + \cdots + |w_n - m|$$

   soit le plus petit possible.

   Un nombre m qui convient est simplement la médiane de la liste ! Par exemple pour $[3, 6, 9, 11]$, la médiane est $m = 7.5$ et on a

   $$d = |3 - 7.5| + |6 - 7.5| + |9 - 7.5| + |11 - 7.5| = 11$$

   et on ne peut pas faire moins.

   Écris une fonction `calcule_mediane(liste)` qui calcule la valeur médiane des éléments d'une liste. Par définition, la moitié des valeurs est inférieure ou égale à la médiane, l'autre moitié est supérieure ou égale à la médiane. Voir le rappel de cours juste après cette activité pour ce calcul.

3. **Meilleure suite.** On va maintenant résoudre notre problème initial. On nous donne donc une liste $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et on cherche une progression arithmétique $u = [u_0, u_1, \ldots, u_n]$. Pour trouver les (u_i) on doit donc trouver un terme initial u_0 et une raison r.

   Méthode.

   - On va d'abord trouver un r approché qui convient bien par une méthode de balayage. On cherche le meilleur r en commençant par $r = 0$ puis, par petits pas on teste jusqu'à, par exemple, $r = 2(v_1 - v_0)$.
   - Pour chaque r, le terme initial u_0 qui convient est la médiane de la liste $(v_i - ir)$. (Justification : il faut minimiser la somme des $|v_i - u_i| = |v_i - ir - u_0|$; u_0 est donc la médiane des $(v_i - ir)$.)

   Programme l'algorithme suivant en une fonction `balayage(v,N)` qui renvoie le terme initial u_0 et la raison r d'une suite arithmétique qui approche au mieux $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$. Le paramètre N correspond à la précision du balayage (plus N est grand, plus l'approximation sera bonne).

Algorithme.

- — Entrée : une liste ordonnée de termes $v = [v_0, v_1, \ldots, v_n]$ et un entier N.
  — Sortie : un terme initial u_0 et une raison r.
- Définir un pas $p = 2\frac{v_1 - v_0}{N}$ (ce sera le pas pour le balayage de r).
- Initialise une valeur d_{min} par une très grande valeur (par exemple $d_{\text{min}} = 10\,000$), cette variable stockera la distance la plus petite rencontrée. Deux variables r_{min} et $u_{0,\text{min}}$ mémoriseront les meilleurs r et u_0 trouvés.
- Poser $r = 0$.
- Pour k allant de 0 à $N + 1$:
  — Calculer u_0 la médiane de $(v_i - ir)$ (pour $0 \leqslant i \leqslant n$).
  — Définir u, la liste des premiers termes de la suite arithmétique de terme initial u_0 et de raison r (tu peux utiliser la fonction `liste_arithmetique(n,u0,r)` de la première activité).
  — Calcule la distance d entre les listes u et v.
  — Si $d < d_{\text{min}}$ alors faire : $d_{\text{min}} \leftarrow d$; $r_{\text{min}} \leftarrow r$ et $u_{0,\text{min}} \leftarrow u_0$.
  — Faire $r \leftarrow r + p$.
- Renvoyer $u_{0,\text{min}}$ et r_{min}.

Quelle est la meilleure progression arithmétique pour approcher la liste $[6, 11, 14, 20, 24, 29, 37]$?

Cours 3 (Médiane).
Par définition de la ***médiane***, la moitié des valeurs sont inférieures ou égales à la médiane, l'autre moitié sont supérieures ou égales à la médiane.
Voici comment calculer la médiane. On note n la longueur de la liste, on suppose que la liste est ordonnée (du plus petit au plus grand élément).

- **Cas n impair.** La médiane est la valeur de la liste au rang $\frac{n-1}{2}$. Exemple avec `liste = [12,12,14,15,19]` :
  — la longueur de la liste est $n = 5$ (les indices vont de 0 à 4),
  — l'indice du milieu est l'indice 2,
  — la médiane est la valeur `liste[2]`, c'est donc 14.
- **Cas n pair.** La médiane est la moyenne entre la valeur de la liste au rang $\frac{n}{2} - 1$ et celle au rang $\frac{n}{2}$. Exemple avec `liste = [13,14,19,20]` :
  — la longueur de la liste est $n = 4$ (les indices vont de 0 à 3),
  — les indices du milieu sont 1 et 2,
  — la médiane est la moyenne entre `liste[1]` et `liste[2]`, c'est donc $\frac{14+19}{2} = 16.5$.