Intégrale

Nous allons étudier différentes techniques pour calculer des valeurs approchées d'intégrales.

Cours 1 (Primitive)**.**
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Une ***primitive*** de f est une fonction dérivable $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ tel que $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in [a,b]$. Si on sait calculer une primitive alors on sait calculer l'intégrale de f :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Exemple : soit $f(x) = x^2$, une primitive de la fonction f est la fonction F définie par $F(x) = \frac{1}{3}x^3$, donc par exemple $\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = F(1) - F(0) = \frac{1}{3}$.

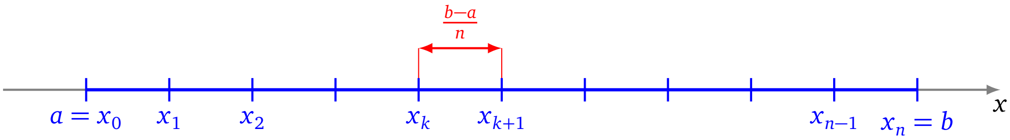
Activité 1 (Primitive)**.**

Objectifs : vérifier expérimentalement si une fonction donnée F est une primitive de f.

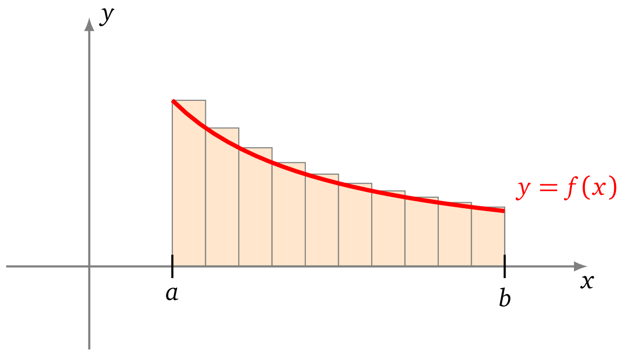
1. Programme une fonction `verification_primitive(f,F,a,b,n,epsilon)` qui vérifie expérimentalement que F est bien une de primitive de f sur l'intervalle $[a,b]$ (n est un entier donné, par exemple $n = 10$ et ϵ une marge d'erreur, par exemple $\epsilon = 0.001$).
   Méthode. Vérifie que pour $n+1$ valeurs x de $[a,b]$ on a $F'(x) \simeq f(x)$. Dans le détail :
   - soit $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k = 0,1,\ldots,n$;
   - on calcule une valeur approchée de $F'(x_k)$ en utilisant la fonction `derivee()` du chapitre « Dérivée » ;
   - on vérifie $F'(x_k) \simeq f(x_k)$ en testant si $\left|F'(x_k) - f(x_k)\right| \leqslant \epsilon$ pour tout $k = 0,\ldots,n$.
2. Écris une fonction `integrale_primitive(F,a,b)` qui calcule l'intégrale d'une fonction f connaissant une primitive F.
3. *Application.*
   (a) Calcule l'aire sous la parabole d'équation $y = x^2$ entre les droites verticales d'équation $(x = 1)$ et $(x = 2)$ et au-dessus de l'axe des abscisses.
   (b) Même question avec l'aire sous le graphe de $f(x) = \sin(x)$ sur $[0,\pi]$.

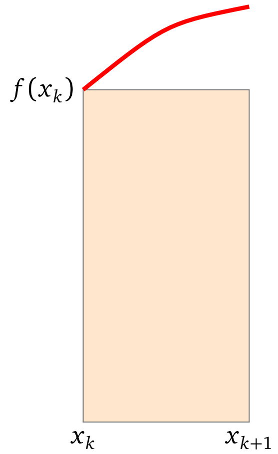
Cours 2 (Calcul approché d'une intégrale)**.**
Il n'est pas toujours possible de calculer une primitive pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On va déterminer des valeurs approchées de $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.
Les trois méthodes d'approximation que l'on va étudier sont toutes basées sur le même principe :

- On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles en posant $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Alors $x_0 = a$ et $x_n = b$ et chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ est de longueur constante $x_{k+1} - x_k = \frac{b-a}{n}$.

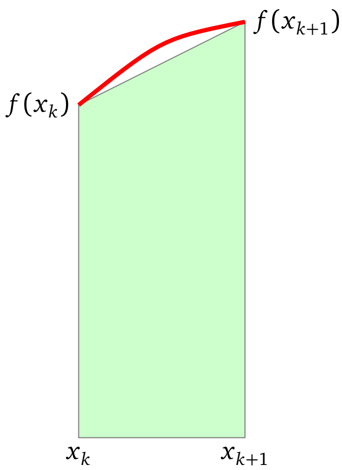


- Sur chaque sous-intervalle $[x_k, x_{k+1}]$, on approche l'aire sous la courbe par l'aire d'une figure géométrique simple.
- **Méthode des rectangles.** La *méthode des rectangles (à gauche)* consiste à approcher l'aire sous la courbe par l'aire de rectangles. La hauteur de chaque rectangle est la valeur à gauche de f sur le sous-intervalle (voir les figures ci-dessous). Pour un intervalle élémentaire, cela revient à approcher $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\,\mathrm{d}t$ par $(x_{k+1} - x_k)f(x_k)$.

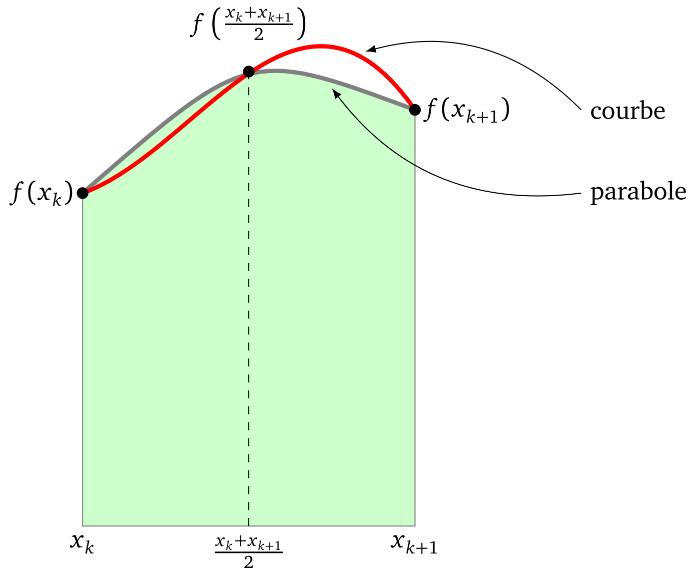




- **Méthode des trapèzes.** On approche l'aire sous la courbe d'un intervalle élémentaire, par l'aire d'un trapèze.



- **Méthode de Simpson.** On approche la courbe sur chaque intervalle élémentaire par une branche de parabole.



Activité 2 (Calcul approché d'intégrales).

Objectifs : programmer la méthode des rectangles, des trapèzes et de Simpson.

$$I = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

1. **Méthode des rectangles (à gauche).**

   Écris une fonction `integrale_rectangles(f,a,b,n)` qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale I par la formule :

   $$\boxed{S_R(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)}$$

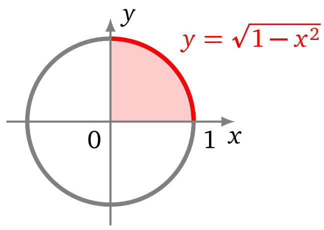
   Application. Calcule une valeur approchée de $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Compare avec la valeur exacte (obtenue par primitive). À partir de quelle valeur de n obtiens-tu 3 chiffres exacts après la virgule ? Et pour obtenir 10 chiffres exacts ?

2. **Méthode des trapèzes.**

   Écris une fonction `integrale_trapezes(f,a,b,n)` qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale I par la formule :

   $$\boxed{S_T(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f(x_k)+f(x_{k+1})}{2}}$$

   - *Application.* Recommence le calcul de $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. Cherche quelles valeurs de n permettent d'avoir 3 chiffres exacts après la virgule, puis 10 chiffres.



- *Application.* Fais le même travail pour calculer une valeur approchée de l'aire d'un disque de rayon 1 par la formule $I_2 = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\mathrm{d}t$.

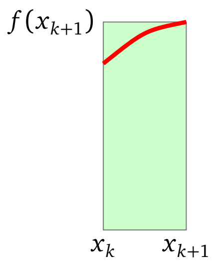
3. **Méthode de Simpson.**

   Écris une fonction `integrale_simpson(f,a,b,n)` qui renvoie une valeur approchée de l'intégrale I par la formule :

$$\boxed{S_S(n) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f(x_k)+4f(\frac{x_k+x_{k+1}}{2})+f(x_{k+1})}{6}}$$

- *Application.* Recommence le calcul de $I_1 = \int_1^2 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et trouve les valeurs de n qui permettent d'avoir 3 chiffres exacts après la virgule, puis 10 chiffres.
- *Application.* Fais le même travail pour $I_2 = 4\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.
- *Application.* Trouve une valeur approchée de $I_3 = 4\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

4. **Bonus.**



   (a) Programme une fonction qui calcule une valeur approchée d'une intégrale par la méthode des rectangles à droite : c'est-à-dire que sur l'intervalle $[x_k, x_{k+1}]$ on approche l'intégrale par le rectangle de hauteur $f(x_{k+1})$ (et pas celui de hauteur $f(x_k)$).

   (b) Montre que dans le cas d'une fonction monotone (croissante ou bien décroissante) les deux méthodes des rectangles (droite et gauche) fournissent un encadrement de l'intégrale. Déduis-en des encadrement des intégrales I_1, I_2, I_3.

   (c) Pour la méthode des trapèzes, essaie d'écrire ta fonction de sorte qu'elle ne calcule qu'une seule fois chaque $f(x_k)$.

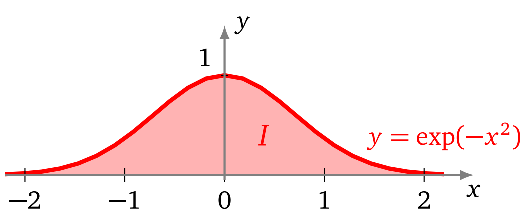
   (d) *Projet.* Réalise la visualisation graphique des différentes méthodes.

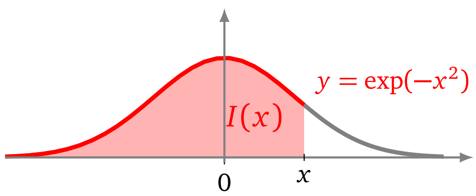
Activité 3 (Intégrale de Gauss).

Objectifs : calculer une valeur approchée de l'intégrale de Gauss.

On note

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$





Dans les exemples précédents, les intégrales à calculer avaient une valeur bien connue. C'est aussi le cas de l'intégrale de Gauss I qui vaut $I = \sqrt{\pi}$. Par contre, en général, on ne saura pas calculer la valeur exacte d'une intégrale : c'est le cas des intégrales $I(x)$. D'où l'intérêt d'en trouver des valeurs approchées.

1. Programme une fonction `integrale_gauss1()` qui renvoie une valeur approchée de I et compare ta valeur avec $\sqrt{\pi}$.

   Indication. Définis une grande valeur pour l'infini, par exemple en posant $N = 25$. Au lieu de calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, tu calcules $\int_{-N}^{+N} f(t)\,\mathrm{d}t$ (pour $|x| \geqslant 25$, $\exp(-x^2)$ est presque nul).

2. Programme une fonction `integrale_gauss2(x)` qui renvoie une valeur approchée de $I(x)$.

3. Pour les calculs de probabilités, nous aurons besoin de calculer la loi normale dont la fonction de répartition est donnée par
$$I_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{\sigma^2}}\,\mathrm{d}t$$
   où μ est l'espérance et σ^2 la variance (σ est l'écart-type).

   Programme une fonction `integrale_gauss3(x,mu,sigma2)` qui renvoie $I_{\mu,\sigma^2}(x)$.

4. On modélise la répartition des personnes selon leur QI par une courbe de Gauss de paramètre $\mu = 100$ (le QI moyen) et $\sigma^2 = 225$ (écart-type $\sigma = 15$). Avec ces paramètres $I_{\mu,\sigma^2}(x)$ représente le pourcentage de personnes ayant un QI inférieur à x. Par exemple $I(100) = 0.5$, donc 50% de la population a un QI inférieur à 100. Quel pourcentage de la population a un QI supérieur à 115 ?