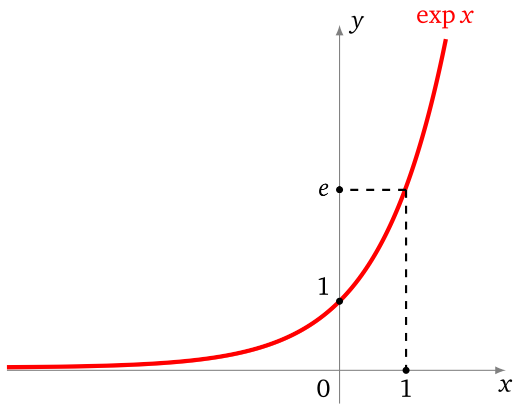
Exponentielle

L'exponentielle joue un rôle important dans la vie de tous les jours : elle permet de modéliser la vitesse de refroidissement de votre café, de calculer la croissance d'une population ou de calculer la performance d'un algorithme.



Cours 1 (La fonction exponentielle)**.**
Voici un très court cours sur l'exponentielle.

- La *fonction exponentielle* est la fonction $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ qui vérifie :
$$\exp(0) = 1 \qquad \text{et} \qquad \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y).$$
- On note $e = \exp(1) = 2.718281\ldots$
- La fonction exponentielle est strictement croissante, strictement positive, $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$, $\exp(nx) = (\exp(x))^n$.
- On note $e^x = \exp(x)$, de sorte que $e^{x+y} = e^x \cdot e^y$, $e^{-x} = 1/e^x$, $e^0 = 1$, $e^1 = e$, $e^{nx} = (e^x)^n$ ...
- La dérivée de l'exponentielle est elle même : $\exp'(x) = \exp(x)$.
- La *fonction logarithme* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est la bijection réciproque de la fonction exponentielle, c'est-à-dire :
$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y).$$
Plus précisément :
$$\begin{aligned} &\exp\big(\ln(x)\big) && \text{pour tout } x > 0, \\ &\ln\big(\exp(x)\big) && \text{pour tout } x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$
Le logarithme vérifie $\ln(1) = 0$ et $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$.
- L'exponentielle permet de définir une puissance avec des exposants réels :
$$a^b = \exp\big(b \ln(a)\big).$$

Autrement dit $a^b = e^{b\ln(a)}$.

Cours 2 (Exponentielle et logarithme avec `Python`).

- Pour obtenir une valeur approchée de l'exponentielle en un point il faut importer le module `math` par la commande `from math import *` puis utiliser la fonction `exp()`.
- Il y a plusieurs fonctions logarithmes accessibles depuis le module `math`. Celle qui correspond au logarithme népérien $\ln(x)$ s'obtient par l'appel à la fonction `log()`. (À ne pas confondre avec la notation mathématique $\log(x)$ qui désigne habituellement le logarithme décimal !)
- Il est possible de faire des calculs de puissances, sans importer le module `math`, par la commande :

```
a ** b
```

Objectifs des quatre premières activités : découvrir le comportement de l'exponentielle à travers des activités variées.

Activité 1 (Les grains de riz).
Pour le remercier d'avoir inventé le jeu d'échec, le roi des Indes demande à Sissa ce qu'il veut comme récompense. Sissa répond : « Je souhaiterais que vous déposiez un grain de riz sur la première case, deux grains de riz sur la seconde, quatre grains de riz sur la troisième... et ainsi de suite en doublant à chaque case le nombre de grains. ». « Facile ! » répondit le roi...

1. Combien faut-il de grains de riz au total pour recouvrir l'échiquier de 64 cases ?
2. Un kilogramme de riz contient 50 000 grains. Quelle est la masse totale (en tonnes) de tous les grains de riz de l'échiquier ?

Et toi : préfères-tu recevoir 1 million d'euros d'un coup ou bien 1 centime le premier jour, puis 2 centimes le second, 4 centimes le jour suivant... pendant un mois ?

Activité 2 (Le nénuphar qui s'agrandit).
Un nénuphar multiplie sa surface d'un facteur 1.5 chaque jour. Au dixième jour sa surface vaut 100 m^2.

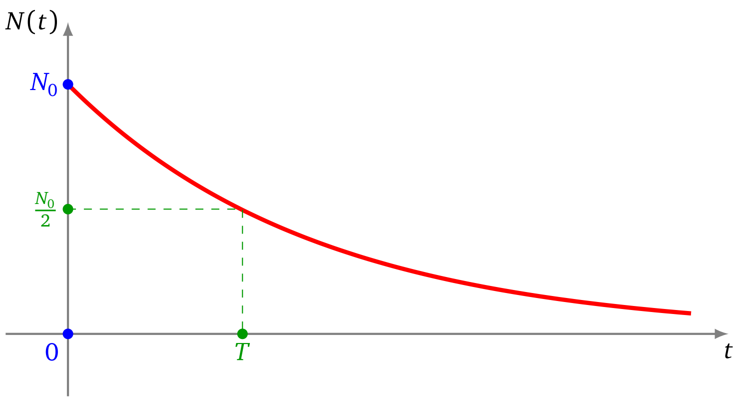
1. Quelle surface recouvre le nénuphar au quinzième jour ?
2. Quelle surface S_9 recouvrait le nénuphar le neuvième jour ? Et le huitième jour ? Calcule la surface S_0 que recouvrait le nénuphar le jour initial (le jour 0).
3. Trouve la formule $S(j)$ qui exprime la surface recouverte au jour j, en fonction de j et de S_0.
   Définis une fonction `surface_nenuphar(x)` qui renvoie cette surface $S(x)$. Le paramètre x représente le nombre de jours écoulés, mais n'est pas nécessairement un nombre entier.
   Vérifie que tu peux utiliser indifféremment une commande du type `a ** x` (pour a^x) ou bien `exp(x*log(a))` pour $\exp\big(x\ln(a)\big)$.
4. Trouve par tâtonnement ou par balayage au bout de combien de jours la surface du nénuphar est de 10 000 m^2. Donne la réponse avec deux chiffres exacts après la virgule.
5. (Si tu maîtrises le logarithme.) Trouve l'expression de x en fonction de la surface couverte S. Programme une fonction `jour_nenuphar(S)` qui renvoie le nombre de jours écoulés x pour atteindre la surface S donnée. Par exemple `jour_nenuphar(200)` renvoie $x = 11.709\ldots$

Activité 3 (Demi-vie et datation au carbone 14)**.**
Le carbone 14 est un élément radioactif présent dans le corps de chaque être vivant et qui disparaît peu à peu à sa mort par désintégration. En mesurant le taux de carbone 14 par rapport au taux de carbone ordinaire (qui lui ne se désintègre pas), on peut dater l'époque à laquelle a vécu l'être vivant (jusqu'à 40 000 ans en arrière).
Le nombre d'atomes de carbone 14 suit une loi exponentielle donnée par la formule :

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t\ln(2)}{T}\right)$$

où :

- $N(t)$ est le nombre d'atomes restant après t années,
- N_0 est le nombre d'atomes initial, on prendra ici $N_0 = 1000$,
- T est la période de demi-vie des atomes de carbone 14, $T = 5730$.

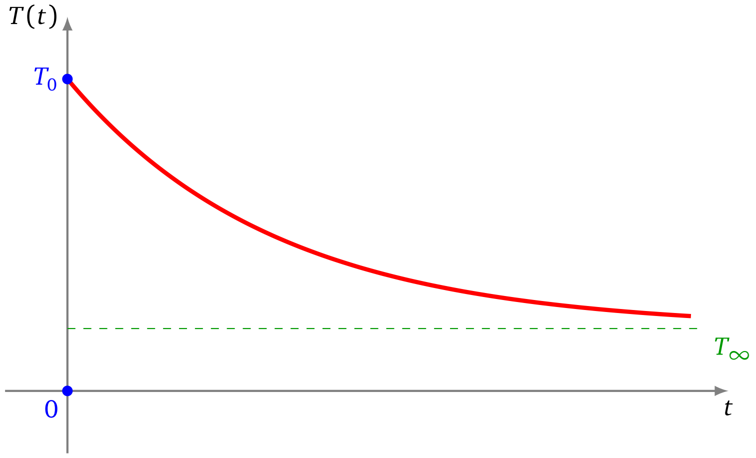


1. Programme une fonction `carbone14(t,N0=1000,T=5730)` qui renvoie $N(t)$. Combien reste-t-il d'atomes sur les 1000 atomes de départ au bout de 100 ans ?
2. (a) Vérifie mathématiquement et expérimentalement que
$$N(t) = N_0 \cdot 2^{-t/T}.$$
   (b) Combien reste-t-il d'atomes au bout de $T = 5730$ années ? Justifie le terme de « demi-vie » pour la durée T.
   (c) Combien reste-t-il d'atomes au bout de $2T$ années ? Au bout de $3T$ années ? ...
   (d) Saurais-tu trouver de tête environ combien il reste d'atomes au bout d'une période de 10 demi-vies ?
3. On souhaite dater un échantillon à partir de sa teneur en carbone 14.
   (a) Vérifie mathématiquement que
$$t = -\frac{T}{\ln(2)}\ln\left(\frac{N(t)}{N_0}\right).$$
   (b) Programme une fonction `datation14(N,N0=1000,T=5730)` qui renvoie la date de l'échantillon en fonction du nombre d'atomes N mesuré.
   (c) Vérifie que si on mesure $N = 500$ atomes sur les $N_0 = 1000$ initial, alors l'échantillon a bien l'âge que l'on pense.
   (d) Tu as trouvé un échantillon d'une espèce disparue, l'*Animagus Pythoniscus* avec $N = 200$ atomes sur les $N_0 = 1000$ initial. Quand a vécu cet animal ?

Activité 4 (La loi de refroidissement de Newton)**.**
On place un corps chaud de température initiale T_0 (par exemple $T_0 = 100\,°C$) dans une pièce plus froide de température T_∞ (par exemple $T_\infty = 25\,°C$). Le corps chaud se refroidit progressivement jusqu'à atteindre la température de la pièce (au bout d'un temps infini). La loi de refroidissement de Newton exprime le température $T(t)$ du corps en fonction du temps t (en minutes) :

$$T(t) - T_\infty = (T_0 - T_\infty)e^{-kt}$$

où k est une constante que l'on va déterminer expérimentalement.



1. Vérifie mathématiquement que $T(0) = T_0$ et que $\lim_{t\to+\infty} T(t) = T_\infty$.
2. On fixe $T_0 = 100\,°C$, $T_\infty = 25\,°C$ et on va déterminer k à l'aide d'une information supplémentaire. On mesure qu'à l'instant $t_1 = 10$ minutes, la température du corps est $T_1 = 65\,°C$.
   Prouve que la constante k est donnée par la formule :
   $$k = -\frac{1}{t_1}\ln\left(\frac{T_1 - T_\infty}{T_0 - T_\infty}\right).$$
3. Maintenant que tu connais k, programme une fonction `temperature(t)` qui renvoie la température $T(t)$. Quelle est la température au bout de 20 minutes de refroidissement ?
4. Par tâtonnement, par balayage ou en résolvant une équation, trouve au bout de combien de temps (arrondi à la minute près) la température du corps atteint $30\,°C$.

Activité 5 (Définition de l'exponentielle)**.**

Objectifs : programmer le calcul de $\exp(x)$ *par différentes méthodes.*

1. **Limite d'une suite.** On a
   $$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$
   Déduis-en une fonction `exponentielle_limite(x,n)` qui renvoie une valeur approchée de $\exp(x)$ pour une valeur de n (assez grande) fixée.
   Teste ta fonction pour calculer $\exp(2.8)$, avec $n = 10$, puis $100\ldots$ Compare tes résultats avec la fonction `Python` `exp()`.
2. **Factorielle.** Programme une fonction `factorielle(n)` qui renvoie
   $$n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n.$$
   Indications. Le plus simple est d'initialiser une variable `fact` à 1 puis de programmer une boucle. Par convention $0! = 1$. Par exemple $10! = 3\,628\,800$.

3. **Somme infinie.** On note
$$S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^k}{k!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$
Alors
$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$
Déduis-en une fonction `exponentielle_somme(x,n)` qui renvoie la valeur de la somme S_n et qui fournit ainsi une valeur approchée de $\exp(x)$.
Teste ta fonction avec $n = 10$, $n = 15$...
4. **Méthode de Hörner.** Afin de minimiser les multiplications (du genre $x^k = x \times x \times x \cdots$) voici la formule de Hörner qui est juste une réécriture de la somme S_n définie à la question précédente :
$$S_n = 1 + \frac{x}{1}\left(1 + \frac{x}{2}\left(1 + + \frac{x}{3}\left(\cdots + \frac{x}{n-1}\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)\right)\right)$$
Et bien sûr :
$$\exp(x) = \lim_{n\to+\infty} S_n.$$
Programme une fonction `exponentielle_horner(x,n)` qui implémente cette méthode et renvoie la valeur de S_n.
Indications. Il faut partir du terme le plus imbriqué $1 + \frac{x}{n}$ puis construire cette expression à rebours à l'aide d'une boucle.
5. (Un peu de théorie plus difficile.) Compare le nombre de multiplications effectuées pour les méthodes des deux questions précédentes pour le calcul de S_n. Par exemple le calcul de $\frac{x^3}{3!}$ nécessite deux multiplications pour $x^3 = x \times x \times x$ et deux multiplications pour $3! = 1 \times 2 \times 3$. (Note : on ne compte pas les additions car c'est une opération peu coûteuse, et ici on ne tient pas compte des divisions car il y en a autant pour les deux méthodes.)
6. **Fraction continue d'Euler.** Voici une nouvelle formule pour $S_n = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$ sous la forme d'une succession de fractions :
$$S_n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{x}{1 + x - \cfrac{x}{2 + x - \cfrac{2x}{3 + x - \cfrac{3x}{4 + x - \cdots \cfrac{\ddots}{n - 1 + x - \cfrac{(n-1)x}{n + x}}}}}}}$$
On programme cette formule en partant de la fraction tout en bas par l'algorithme suivant :

> **Algorithme.**
> - Action : calculer la somme S_n en fonction de x.
> - Initialiser $S \leftarrow 0$.
> - Pour k allant de n à 1 (donc à rebours), faire :
> $$S \leftarrow \frac{x}{k + x - kS}$$
> - À la fin, faire $S \leftarrow \dfrac{1}{1 - S}$.
> - Renvoyer S.

Programme cet algorithme en une fonction `exponentielle_euler(x,n)`.

7. **Exponentielle de grandes valeurs.** Les fonctions précédentes sont valables quel que soit x, mais pour de grandes valeurs de x (par exemple $x = 100.5$) il faut de grandes valeurs de n pour obtenir une bonne approximation de $\exp(x)$. Pour remédier à ce problème nous allons voir un algorithme qui permet de se ramener au calcul de l'exponentielle d'un réel $f \in [0,1[$ pour lequel les fonctions précédentes sont efficaces.

   L'idée est de décomposer x en sa partie entière plus sa partie fractionnaire :
   $$x = k + f \qquad \text{où } k \text{ est un entier et } 0 \leqslant f < 1.$$
   On utilise la propriété de l'exponentielle :
   $$e^x = e^{k+f} = e^k \times e^f.$$
   Maintenant :
   - $e^f = \exp(f)$ s'obtient par le calcul de l'exponentielle d'un petit réel $0 \leqslant f < 1$ et se calcule bien par l'une des méthodes précédentes.
   - $e^k = e \times e \times \cdots \times e$ est le produit de plusieurs e, c'est donc un simple calcul de puissance (et pas vraiment un calcul d'exponentielle).
   - Il faut au préalable avoir calculé une fois pour toutes la valeur de la constante $e = \exp(1) = 2.718\ldots$ par l'une des méthodes précédentes.

   Voici l'algorithme à programmer en une fonction `exponentielle_astuce(x,n)` :

   Algorithme.
   - Action : calculer une approximation de $\exp(x)$.
   - Préalable : calculer une fois pour toutes la valeur de $e = \exp(1)$ avec le maximum de précision.
   - Poser k la partie entière de x (utiliser `floor()`).
   - Poser $f = x - k$.
   - Calculer une valeur approchée de $\exp(f)$ par l'une des méthodes précédentes en fonction d'un paramètre n.
   - Calculer $\exp(k) = e^k$ par le calcul de puissance $e \times e \times \cdots$
   - Renvoyer l'approximation correspondant au résultat $\exp(x) = \exp(k) \times \exp(f)$.