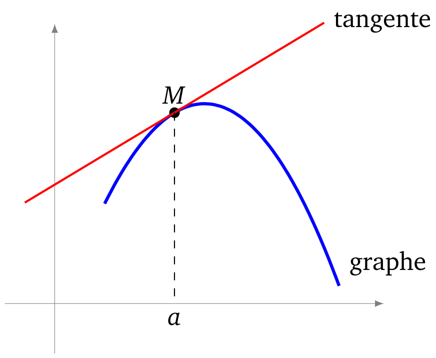
Dérivée – Zéros de fonctions

Nous étudions les fonctions : le calcul de la dérivée d'une fonction, le tracé du graphe et de tangentes, et enfin la recherche des valeurs en lesquelles la fonction s'annule.

Cours 1 (Dérivée).
Par définition le nombre dérivé de f en a (s'il existe) est :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Dans cette fiche nous supposerons que toutes les dérivées étudiées existent.
Voici l'interprétation géométrique du nombre dérivé : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente au graphe de f au point d'abscisse a.



Cours 2 (Fonction lambda).
Une fonction lambda (lettre grecque λ) est une façon simple de définir une fonction en `Python` qui s'apparente à une fonction mathématique. Par exemple :

```
f = lambda x: x**2
```

Cela définit une fonction `Python` `f` qui correspond à la fonction mathématique f définie par $f : x \mapsto x^2$.
Ainsi `f(2)` renvoie `4`, `f(3)` renvoie `9`...
C'est une alternative condensée au code suivant :

```
def f(x):
    return x**2
```

Une fonction est un objet `Python` comme un autre. Elle peut donc être utilisée dans le programme comme dans l'exemple suivant qui teste si $f(a) > f(b)$:

```
def est_plus_grand(f,a,b):
    if f(a) > f(b):
        return True
    else:
        return False
```

Pour les deux fonctions `f` définies au-dessus (soit à l'aide de `lambda`, soit à l'aide de `def`) alors

`est_plus_grand(f,1,2)`

renvoie « Faux ».

À l'aide des fonctions lambda on peut aussi se permettre de ne pas donner de nom à une fonction, comme ci-dessous avec la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors

`est_plus_grand(lambda x:1/x,1,2)`

qui renvoie « Vrai » (`lambda x:1/x` joue le rôle de `f`).

Activité 1 (Calcul de la dérivée en un point).

Objectifs : calculer une valeur approchée de la dérivée en un point.

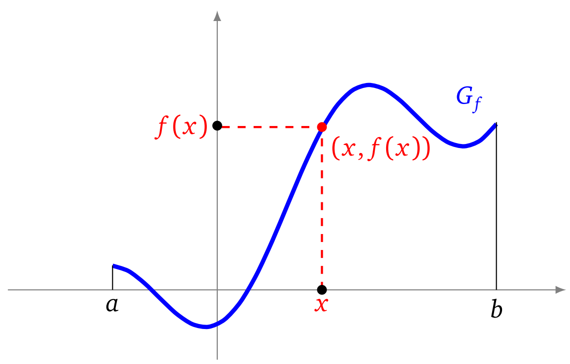
On va calculer une valeur approchée du nombre dérivé $f'(a)$ en calculant le taux d'accroissement $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ avec h suffisamment petit.

1. Définis la fonction f, $x \mapsto x\sqrt{1-x}$. Deux méthodes : soit à l'aide de `def f(x):...`, soit par `f = lambda x:...` Calcule les valeurs approchées de $f(k)$ pour $k \in \{0,1,2,\dots,5\}$.
2. Programme une fonction `derivee(f,a)` qui calcule une valeur approchée de la dérivée de f en a par la formule
$$f'(a) \simeq \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
en prenant par exemple pour valeur $h = 0.0001$.
Pour la fonction $f : x \mapsto x^3$, compare la valeur approchée en a que tu obtiens avec la valeur exacte de $f'(k)$ pour $k \in \{0,1,2,\dots,5\}$. Diminue la valeur de h pour obtenir une meilleure approximation.

Activité 2 (Graphe d'une fonction et tangente).

Objectifs : tracer le graphe d'une fonction ainsi que des tangentes.

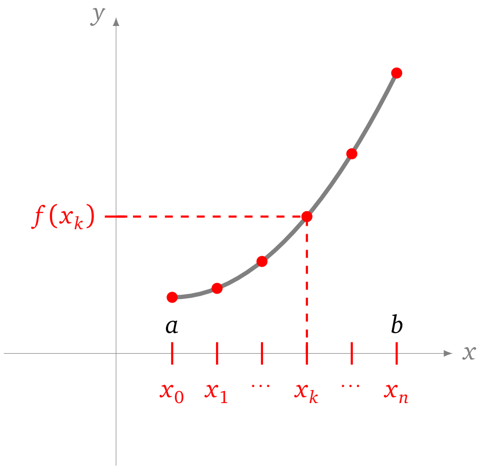
Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction. Son graphe G_f est :
$$G_f = \big\{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\big\}$$



1. **Calculer des points.** Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On divise l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de longueur $\frac{b-a}{n}$ en définissant :

$$x_k = a + k\frac{b-a}{n}.$$

Programme une fonction `graphe(f,a,b,n)` qui calcule et renvoie la liste des points $\big(x_k, f(x_k)\big)$ pour $k = 0, \ldots, n$.

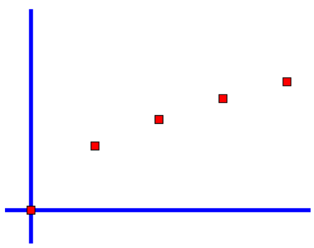


Par exemple pour `f = lambda x: x*x` alors `graphe(f,0,2,4)` renvoie la liste :

```
[(0, 0), (0.5, 0.25), (1.0, 1.0), (1.5, 2.25), (2.0, 4.0)]
```

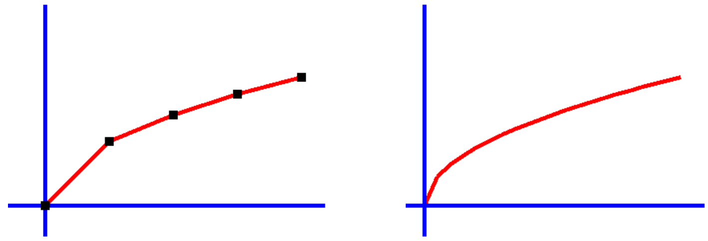
2. **Afficher des points.** Programme une fonction `afficher_points(points)` qui affiche une liste de points.

   Indications. Tu peux utiliser le module `tkinter` (ou bien le module `matplotlib`). Tu peux utiliser une variable `echelle` pour contrôler la taille de l'affichage. Les figures ci-dessous sont tracées pour la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x}$ sur l'intervalle $[0, 4]$.



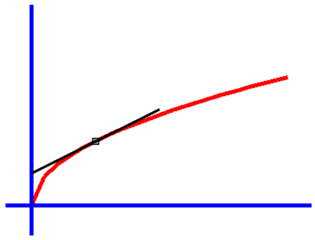
3. **Tracer le graphe.** Améliore la fonction précédente pour écrire une fonction `tracer_graphe(f,a,b)` qui trace le graphe de f.

   Indications. Il suffit de relier n points du graphe entre eux pour n assez grand (avec 5 points à gauche et 20 points à droite).



4. **Tracer une tangente.**

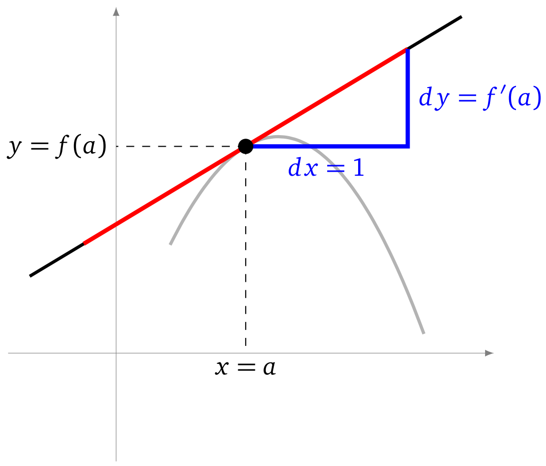
   Trace la tangente au graphe au point $(a, f(a))$ par une fonction `tracer_tangente(f,a)`.



Indications. On se place au point $(x, y) = (a, f(a))$. En ce point la pente de la tangente est donnée par $f'(a)$. En posant

$$dx = 1 \quad \text{et} \quad dy = f'(a)$$

alors on représente une demi-tangente par le segment reliant (x, y) à $(x + dx, y + dy)$. L'autre demi-tangente est représentée par le segment reliant (x, y) à $(x - dx, y - dy)$.



Cette activité peut être l'occasion d'utiliser les arguments optionnels, par exemple au lieu de définir la fonction `tracer_graphe()` par l'entête :

```
def tracer_graphe(f,a,b):
```

et d'avoir des variables locales `n` et `echelle`, tu peux définir ta fonction par :

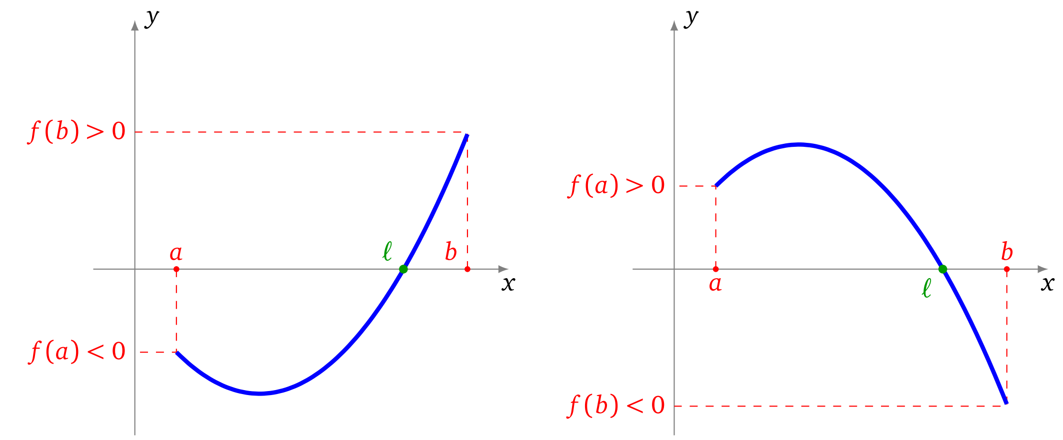
```
def tracer_graphe(f,a,b,n=20,echelle=50):
```

Ce qui permet d'avoir une valeur de `n` et de `echelle` par défaut, en conservant la possibilité de les changer. Des appels possibles sont :

- `tracer_graphe(f,a,b)` ;
- `tracer_graphe(f,a,b,n=100)` pour tracer plus de points ;
- `tracer_graphe(f,a,b,echelle=10)` pour changer l'échelle.

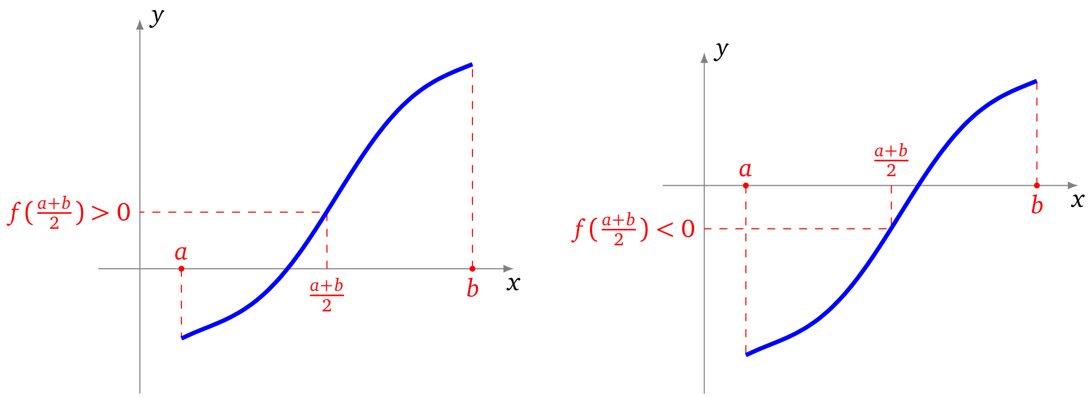
Cours 3 (Dichotomie)**.**
Le méthode de dichotomie est basée sur cette version du théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires, alors f s'annule au moins une fois sur l'intervalle $[a, b]$. Autrement dit, il existe $\ell \in [a, b]$ tel que $f(\ell) = 0$.



Principe de la dichotomie ($\delta\iota\chi o\tau o\mu\iota\alpha$ signifie « coupé en deux »). On sait que notre fonction f s'annule sur $[a, b]$. On calcule $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$, c'est-à-dire l'image du milieu du segment $[a, b]$. On cherche ensuite où f peut s'annuler par rapport à ce milieu :

- Si $f(a)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ sont de signes contraires alors f s'annule sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$,
- sinon f s'annule sur $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.

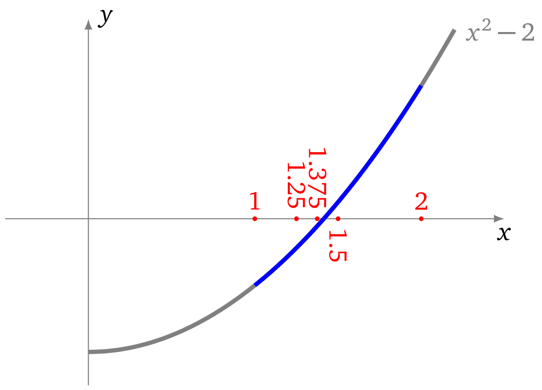


On recommence l'opération sur l'intervalle $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ ou bien sur l'intervalle $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$.
Remarques :

- $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires si et seulement si $f(a) \times f(b) \leqslant 0$.
- On va construire des intervalles de plus en plus petits qui contiennent une solution ℓ, de $f(\ell) = 0$. On obtient donc un encadrement de ℓ (mais pas sa valeur exacte).
- Il se peut que f s'annule plusieurs fois, mais la méthode de dichotomie ne fournit l'encadrement que d'une seule solution.
- Pour expliquer la partie « si » du principe de la dichotomie, on applique le théorème des valeurs intermédiaires sur $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$. Pour expliquer la partie « sinon », on remarque d'abord que $f(b)$ et $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ doivent être de signes contraires, puis on applique le théorème des valeurs intermédiaires.

Exemple.
On cherche « à la main » une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

- Soit f définie par $f(x) = x^2 - 2$. On se place sur l'intervalle $[1,2]$.
- Comme $f(1) = -1 \leqslant 0$ et $f(2) = 2 \geqslant 0$ et que f est continue alors f s'annule sur l'intervalle $[1,2]$ par le théorème des valeurs intermédiaires. Bien sûr, ici f s'annule en $\ell = \sqrt{2}$. Pour l'instant on a prouvé : $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 2$.
- On divise l'intervalle $[1,2]$ en deux parties, le milieu étant $\frac{3}{2}$, on calcule :
$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 = \frac{1}{4} \geqslant 0.$$
Donc sur le demi-intervalle $[1, \frac{3}{2}]$ on a $f(1) \leqslant 0$ et $f(\frac{3}{2}) \geqslant 0$, et c'est bien là que f s'annule. Autrement dit $1 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2}$. C'est un encadrement deux fois plus précis qu'auparavant.
- On divise l'intervalle $[1, \frac{3}{2}]$ en deux parties, le milieu étant $\frac{5}{4}$, on calcule :
$$f\left(\frac{5}{4}\right) = \left(\frac{5}{4}\right)^2 - 2 = -\frac{7}{16} \leqslant 0.$$
Donc sur le demi-intervalle $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$ on a $f(\frac{5}{4}) \leqslant 0$ et $f(\frac{3}{2}) \geqslant 0$, ainsi $\frac{5}{4} = 1.25 \leqslant \sqrt{2} \leqslant \frac{3}{2} = 1.5$.
- On continue ainsi, on obtient des intervalles $[a_i, b_i]$ de plus en plus petits qui encadrent $\sqrt{2}$:
$$\begin{array}{ll}
a_0 = 1 & b_0 = 2 \\
a_1 = 1 & b_1 = 1.5 \\
a_2 = 1.25 & b_2 = 1.5 \\
a_3 = 1.375 & b_3 = 1.5 \\
a_4 = 1.375 & b_4 = 1.4375 \\
a_5 = 1.40625 & b_5 = 1.4375 \\
a_6 = 1.40625 & b_6 = 1.421875 \\
a_7 = 1.4140625 & b_7 = 1.421875 \\
a_8 = 1.4140625 & b_8 = 1.41796875
\end{array}$$
Donc en 8 étapes on prouve que $1.4140625 \leqslant \sqrt{2} \leqslant 1.41796875$. En particulier on obtient les deux premières décimales de $\sqrt{2}$: $\sqrt{2} = 1.41\ldots$



Activité 3 (Dichotomie)**.**

Objectifs : trouver une solution approchée d'une équation $f(x) = 0$.

Le principe de la dichotomie se décline en l'algorithme suivant :

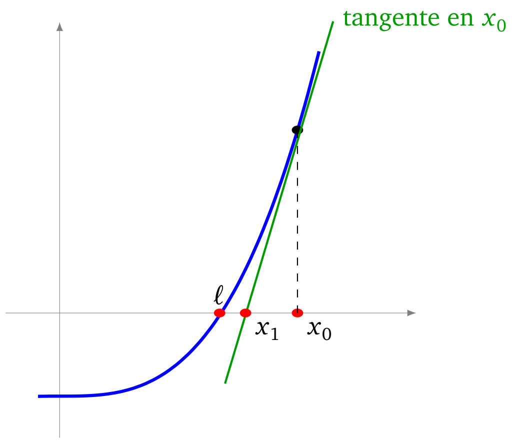
Algorithme.

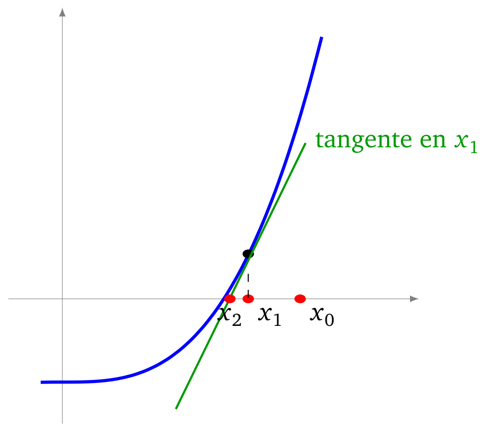
- — Entrée : une fonction f, un intervalle $[a,b]$ avec $f(a)\cdot f(b)\leqslant 0$, une marge d'erreur ϵ.
  — Sortie : un intervalle $[a',b']$ tel que $|b'-a'|\leqslant\epsilon$ sur lequel f s'annule, autrement dit, il existe $a'\leqslant\ell\leqslant b'$ tel que $f(\ell)=0$.
- Tant que $|b-a|>\epsilon$:
  — poser $c=\frac{a+b}{2}$,
  — si $f(a)\times f(c)\leqslant 0$, faire $b\leftarrow c$,
  — sinon, faire $a\leftarrow c$.
- À la fin renvoyer a et b (qui encadrent la solution).

1. Programme cet algorithme en une fonction `dichotomie(f,a,b,epsilon)`.
2. *Exemples.*
   (a) Trouve une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près, en utilisant la fonction définie par $f(x)=x^2-3$ sur l'intervalle $[1,2]$.
   (b) Trouve une valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$, en utilisant la fonction définie par $f(x)=x^3-5$.
   (c) Trouve une valeur approchée de chacune des trois solutions de l'équation $x^5-3x+1=0$.
3. Soit la fonction définie par $f(x)=x^2-3$ sur l'intervalle $[1,2]$. Combien faut-il d'étapes pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ avec 10 décimales exactes après la virgule ?

Cours 4 (Méthode de Newton).
On va voir une autre méthode très efficace pour obtenir une valeur approchée d'une solution ℓ de $f(\ell)=0$.
L'idée de la méthode de Newton est d'utiliser la tangente :

- on part d'une valeur x_0 quelconque,
- on trace la tangente au graphe de f au point d'abscisse x_0,
- cette tangente recoupe l'axe des abscisses en un point d'abscisse x_1 (figure de gauche),
- cette valeur x_1 est plus proche de ℓ que x_0,
- on recommence à partir de x_1 : on trace la tangente, elle recoupe l'axe des abscisses, on obtient une valeur x_2... (figure de droite).





On va ainsi définir une suite (x_n) par récurrence. L'équation de la tangente en une valeur x_n est donnée par $y-f(x_n)=f'(x_n)(x-x_n)$. En partant d'une valeur x_0, on obtient une formule de récurrence, pour

$n \geqslant 0$:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Pour que cette méthode fonctionne il faut tout de même partir d'une valeur x_0 pas trop éloignée de la solution ℓ cherchée.

Exemple.
On cherche encore « à la main » une valeur approchée de $\sqrt{2}$.

- Soit f définie par $f(x) = x^2 - 2$. On a donc $f'(x) = 2x$.
- On part de $x_0 = 2$.
- On calcule $f(x_0) = 2$ et $f'(x_0) = 4$. Par la formule de récurrence :
$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = \frac{3}{2} = 1.5$$
- On calcule $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{4}$, $f'(\frac{3}{2}) = 3$ et donc
$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = \frac{17}{12} = 1.41666\ldots$$
- Puis $x_3 = 1.4142156\ldots$ qui a déjà 5 chiffres après la virgule de corrects !

Activité 4 (Méthode de Newton).

Objectifs : programmer la méthode de Newton.

Algorithme.

- — Entrée : une fonction f, une valeur de départ a, un nombre d'itérations n.
  — Sortie : une valeur approchée de ℓ tel que $f(\ell) = 0$.
- Poser $x = a$.
- Répéter n fois :
$$x \leftarrow x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$
- À la fin renvoyer x (qui approche une solution).

1. Programme cet algorithme en une fonction `newton(f,a,n)`.
   Indication. Utilise ta fonction `derivee(f,x)` avec un h très petit.
2. *Exemples.*
   (a) Trouve une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près, en utilisant la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3$, en partant de $a = 2$.
   (b) Trouve une valeur approchée de $\sqrt[3]{5}$, en utilisant la fonction définie par $f(x) = x^3 - 5$.
   (c) Trouve une valeur approchée de la solution de l'équation $\cos(x) = x$.
3. Soit la fonction définie par $f(x) = x^2 - 3$ et $a = 2$. Combien faut-il d'étapes pour obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ avec 10 décimales exactes après la virgule ? Compare avec la méthode de la dichotomie !