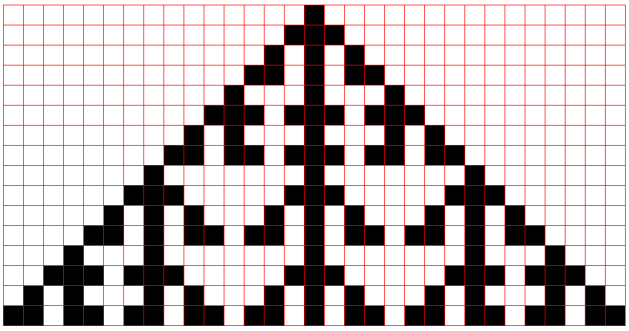
Automates

Tu vas programmer des automates cellulaires qui, à partir de règles simples, produisent des visualisations amusantes.



Activité 1 (Une suite logique)**.**

Objectifs : programmer une suite logique amusante (mais pas nécessaire pour l'activité suivante).

Voici une suite :

1
11
21
1211
111221
312211
13112221
1113213211

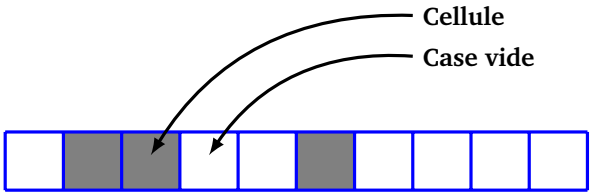
Pour passer d'une ligne à la suivante, il suffit de lire à haute voix en comptant les nombres ! Par exemple la ligne 1211 est lue « un un (pour 1), un deux (pour 2), deux un (pour 1 1) », la ligne d'après est donc 111221 ! Cette dernière ligne se lit « trois uns, deux deux, un un » donc la ligne suivante sera 312211. Programme une fonction `lecture(mot)` qui calcule et renvoie la lecture de la chaîne `mot`. Par exemple `lecture("1211")` renvoie `"111221"`.

- Essaie de programmer cette fonction sans lire les indications suivantes !
- *Indications.* Tu peux utiliser trois variables : une variable qui lit chaque caractère du mot, une variable correspondant au caractère précédent, un compteur à incrémenter si ces deux caractères sont égaux.
- *Algorithme.* Si tu n'y arrives pas tout seul, voici les grandes lignes d'un algorithme possible.
  Pour chaque caractère du mot :
  — si le caractère est le même que le caractère précédent, incrémenter le compteur,
  — sinon, rajouter au mot à créer la valeur du compteur suivie du caractère précédent.

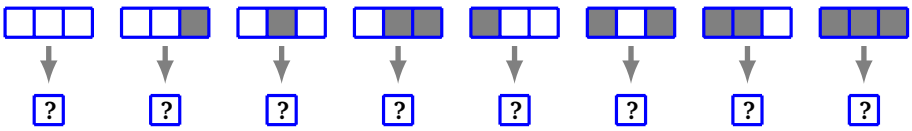
À la fin, il faut aussi rajouter au mot à créer la valeur du compteur suivie du caractère précédent.

Question. Trouve le premier mot qui contient 33.

Cours 1 (Automates linéaires)**.**
On travaille sur des lignes superposées, formées de cases. Chaque case peut contenir une cellule (la case est alors noire/contient 1) ou être vide (la case est blanche/contient 0).



Un ***automate linéaire*** est une règle qui à partir du contenu de trois cases consécutives sur une ligne, détermine le contenu de la case sur la ligne du dessous.
La ***règle*** est donc donnée par la liste des 8 configurations possibles au départ, avec pour chacune la naissance ou pas d'une cellule en-dessous.

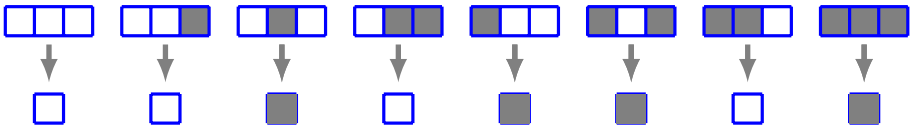


Exemple.

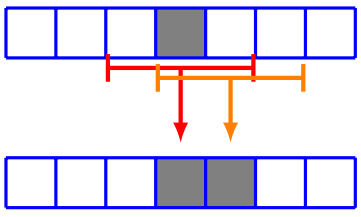
- Partons d'une seule cellule qui sera sur la ligne du haut.

ligne initiale

- Et choisissons la règle définie par les configurations :



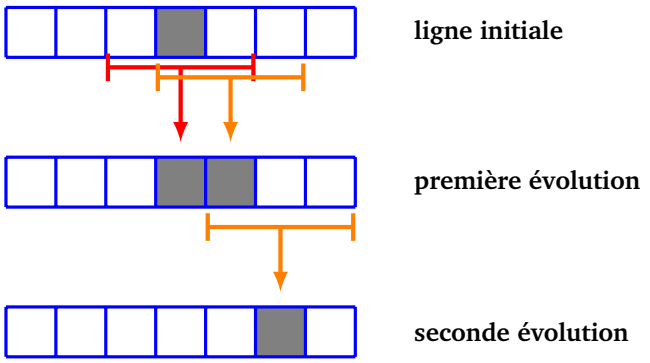
- Pour décider de la naissance d'une cellule dans une case de la ligne en-dessous, on regarde les trois cases au-dessus et on applique la règle. Sur le dessin ci-dessous deux cellules sont vivantes après l'évolution (on a indiqué par des flèches seulement les règles pour lesquelles une cellule apparaît).



ligne initiale

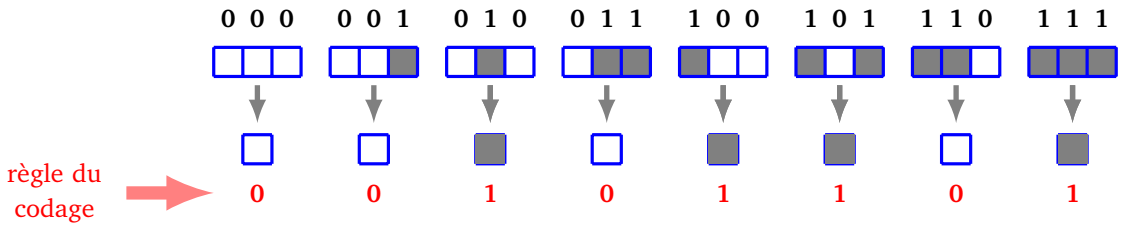
première évolution

- On peut itérer le processus. Une seule cellule apparaît lors de cette seconde évolution.



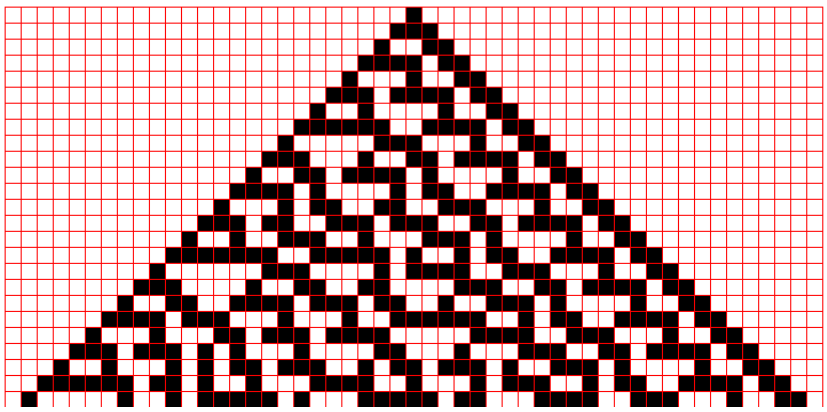
Notations.

- On note 0 pour une case vide et 1 pour une case contenant une cellule vivante.
- Un ligne est représentée par une liste de 0 et de 1. Par exemple `[0,0,0,1,0,1,0,1,0,0]` est une ligne de 10 cases, contenant 3 cellules.
- La règle est codée par une liste de 0 et 1 et de longueur 8, déterminée par l'image des 8 configurations possibles. Par exemple : $[0,0,1,0,1,1,0,1]$ correspond à la règle :

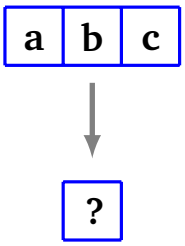


Activité 2 (Automates linéaires)**.**

Objectifs : calculer et afficher les automates linéaires.



1. **Évolution d'une cellule.** Programme une fonction `cellule_suivante(a,b,c,regle)` qui calcule et renvoie la couleur (0 ou 1) de la case située sous les trois cases contenant `a`, `b`, `c` selon la règle donnée.



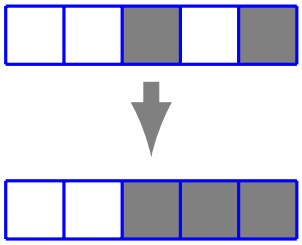
- `a`, `b`, `c` sont les couleurs (0 ou 1) des cases situées au-dessus (a est la case la plus à gauche).
- La loi de transformation est donnée par la liste `regle` formée d'une suite de 8 entiers 0 ou 1.
- Exemple avec `regle = [0,0,1,0,1,1,0,1]` alors `cellule_suivante(0,0,0, regle)` renvoie 0, `cellule_suivante(0,0,1, regle)` renvoie aussi 0, `cellule_suivante(0,1,0, regle)` renvoie 1, etc.
- Si tu ne veux pas écrire les 8 cas possibles, calcule $4a + 2b + c$!

2. **Affichage de la règle.** Déduis-en une fonction `affiche_regle(regle)` qui affiche à l'écran la règle donnée sous la forme « $a, b, c \to d$ » où d est la couleur de la nouvelle case, par exemple :

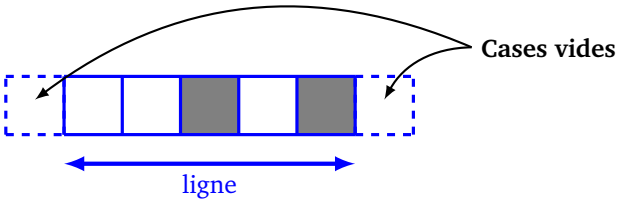
```
0 0 0  ->  0
0 0 1  ->  0
0 1 0  ->  1
...
```

3. **Évolution d'une ligne.** Programme une fonction `ligne_suivante(ligne,regle)` qui à partir d'une liste `ligne` formée de 0 et 1, calcule les cellules de la ligne suivante (renvoyée sous la forme d'une liste de 0 et de 1).

   Exemple. Avec la règle $[0,0,1,0,1,1,0,1]$ alors la ligne suivant $[0,0,1,0,1]$ est la ligne $[0,0,1,1,1]$.



   Remarque. Lors du calcul des cases situées à l'une des deux extrémités de la ligne, on considère qu'au delà, il n'y a pas de cellule (c'est donc comme si à droite et à gauche de la ligne initiale il y avait un 0).

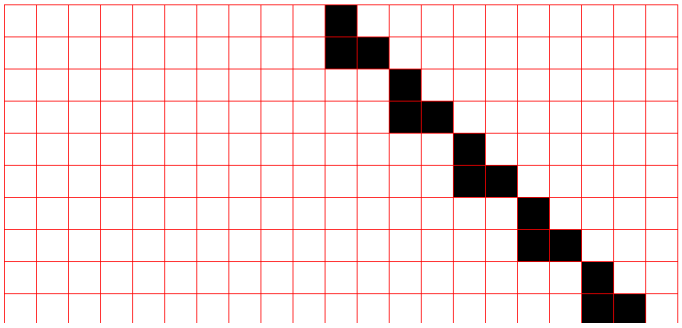


4. **Itérations.** Déduis-en une fonction `plusieurs_lignes(n,ligne,regle)` qui affiche sur le terminal les n lignes qui suivent la ligne donnée.

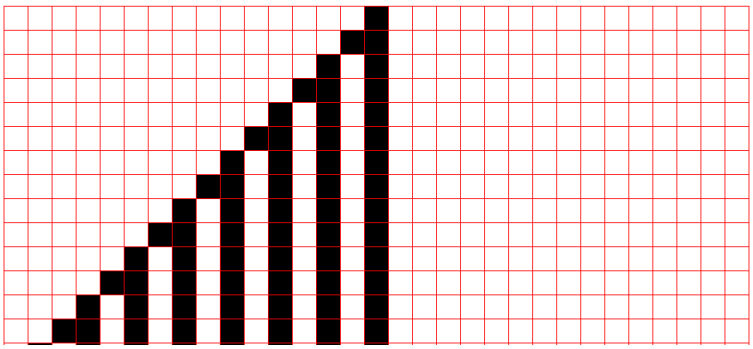
   Exemple. Toujours avec la règle $[0,0,1,0,1,1,0,1]$, pars d'une ligne définie par une seule cellule au milieu :

```
ligne = [0]*10 + [1] + [0]*10
```

   Alors l'itération du processus correspond à l'évolution d'une cellule, qui voyage vers la droite en se dédoublant une fois sur deux.



5. **Affichage.** Programme une fonction `afficher_lignes(n,ligne,regle)` qui réalise un bel affichage graphique d'une ligne de cellules et de son évolution sur n lignes. La présence d'une cellule (marquée par 1) est affichée par une case noire, l'absence de cellule (marquée par 0) est affichée par une case blanche.



6. **Numérotation des règles.** Il y a en tout $2^8 = 256$ règles possibles, car une règle est une liste de 8 *bits*. On décide donc de numéroter la règle en fonction du nombre binaire représenté par la liste :

$$\underbrace{[0,0,1,0,1,1,0,1]}_{\text{règle}} \longleftrightarrow \underbrace{0.0.1.0.1.1.0.1}_{\text{nombre binaire}} \longleftrightarrow \underbrace{45}_{\text{numéro}}$$

Écris une fonction `definir_regle(numero)` qui n'est autre que la conversion d'un entier en écriture binaire sur 8 *bits*. Par exemple `definir_regle(45)` renvoie la règle $[0,0,1,0,1,1,0,1]$.

> **Algorithme.**
> - — Entrée : un entier n entre 0 et 255.
>   — Sortie : le nombre n en écriture binaire sous la forme d'une liste de 8 *bits*.
> - Démarrer avec une liste vide.
> - Répéter 8 fois :
>   — Ajouter $n\,\%\,2$ au début de la liste.
>   — Faire $n \leftarrow n\,//\,2$.
> - Renvoyer la liste.

7. **Types d'automates.**
   En partant d'une seule cellule, essaie de trouver différents types de comportements :
   - des automates cellulaires qui convergent vers un état stable (voire vide),
   - des automates cellulaires qui convergent vers un état périodique,
   - des automates cellulaires ayant des structures symétriques (par exemple, qui réalisent des triangles de Sierpinski),
   - des automates cellulaires avec des structures qui semblent aléatoires.