

Logique vrai/faux

La logique « Vrai/Faux », aussi appelée logique propositionnelle, s'attache à étudier quelle valeur, parmi « Vrai » ou « Faux », peut prendre une formule définie à partir des connecteurs logiques ET, OU, NON...

1. Vrai/faux, connecteurs

1.1. Vrai/faux

Nous définissons deux valeurs V (Vrai) et F (Faux), appelées **valeurs booléennes** ou **valeurs de vérité**. On utilisera aussi la notation 0 (Faux) et 1 (Vrai). La notation anglo-saxonne est T (True) et F (False). Une **variable propositionnelle** est une variable qui peut prendre soit la valeur V (Vrai), soit la valeur F (Faux).

Par exemple, si P : « $2 + 2 = 4$ », alors P est vraie ; en revanche, Q : « $2^2 < 3$ » est fausse.

1.2. $\neg$ (NON), $\wedge$ (ET), $\vee$ (OU)

À partir d'une ou plusieurs variables propositionnelles et de **connecteurs**, on forme de nouvelles formules. Soient P et Q deux variables propositionnelles.

- **Négation** $\neg P$. $\neg P$ est vraie si et seulement si P est fausse.
- **Conjonction** $P \wedge Q$. $P \wedge Q$ est vraie si et seulement si P et Q sont vraies.
- **Disjonction** $P \vee Q$. $P \vee Q$ est vraie si et seulement si P est vraie ou Q est vraie.

Reprenons P : « $2 + 2 = 4$ » et Q : « $2^2 < 3$ ». Alors :

- $\neg P$ est fausse (car P est vraie),
- $\neg Q$ est vraie (car Q est fausse),
- $P \wedge Q$ est fausse (car Q n'est pas vraie),
- $P \vee Q$ est vraie (car P est vraie).

Évidemment, il y a un problème de logique dans nos définitions, car par exemple nous avons défini le connecteur « $\wedge$ » (ET) à l'aide du mot français « et ». Pour remédier à ce problème, on définit l'action de chacun de ces connecteurs par sa **table de vérité** :

P	$\neg P$	P	Q	$P \wedge Q$	P	Q	$P \vee Q$
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V
F	V	F	V	F	F	V	V
		F	F	F	F	F	F

Bien sûr, à partir de ces connecteurs on peut composer des formules plus compliquées :

$$\neg(P \vee Q) \quad , \quad P \wedge (\neg P) \quad , \quad P \wedge (Q \vee R) \quad , \quad (P \wedge Q) \vee R \quad , \quad \dots$$

Les parenthèses sont importantes.

1.3. $\rightarrow$ (implication)

L'**implication** $P \rightarrow Q$ est définie par :

$$P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$$

Comme le connecteur $\neg$ est prioritaire sur les autres, on écrit simplement : $\neg P \vee Q$.

On lit « si P alors Q » ou bien « P implique Q ». Sa table de vérité est :

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

L'usage mathématique classique est de noter ce connecteur $P \implies Q$. Mais au fil du temps son usage a été dévoyé pour signifier « donc », ce qu'il n'est pas ! On y reviendra dans la Section 3.

Ainsi « $P \rightarrow Q$ » signifie « si P est vraie alors Q est vraie ». Voici quelques exemples :

- « il pleut » $\rightarrow$ « le sol est mouillé » est une implication vraie. Dans ce livre, on évitera les exemples en français pour limiter les formulations ambiguës et les discussions interminables du genre « pourquoi le sol de ma cuisine serait mouillé s'il pleut dehors ».
- « $2+2=4$ » $\rightarrow$ « $3 \times 3 = 7$ » est une implication fausse.
- Soit n un entier. « n pair » $\rightarrow$ « n^2 pair » est vraie.

Passons aux aspects surprenants de l'implication.

- « $2+2=4$ » $\rightarrow$ « un entier est pair ou impair » est une implication vraie (car si P et Q sont vraies alors $P \rightarrow Q$ est vraie), même s'il n'y a aucun lien de causalité entre P et Q .
- « $3 \times 3 = 7$ » $\rightarrow$ « $2+2=4$ » et « $3 \times 3 = 7$ » $\rightarrow$ « $2+2=5$ » sont aussi des implications vraies. En effet, dès que P est fausse, alors $P \rightarrow Q$ est vraie. C'est bien sûr clair par la définition de l'implication via $\neg P \vee Q$. Il faut accepter cette conséquence de la définition. Nous y reviendrons aussi dans la Section 3.

1.4. $\leftrightarrow$ (équivalence)

L'**équivalence** $P \leftrightarrow Q$ est définie par la double implication $P \rightarrow Q$ et $Q \rightarrow P$:

$$P \leftrightarrow Q = (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

On dit « P équivaut à Q » ou bien « P si et seulement si Q ».

Autrement dit, $P \leftrightarrow Q$ est vraie lorsque P et Q sont vraies en même temps ou fausses en même temps.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Voici des exemples d'équivalences vraies :

- $\neg\neg P \leftrightarrow P$: la négation d'une négation revient à la proposition initiale.
- $P \rightarrow Q \leftrightarrow (\neg P) \vee Q$: par définition de l'implication.

En revanche, l'équivalence suivante est *fausse* :

$$P \wedge Q \leftrightarrow P \vee Q$$

Plus précisément, cette équivalence n'est pas vraie pour toutes les valeurs attribuées à P et Q . En effet, l'implication $P \wedge Q \rightarrow P \vee Q$ est toujours vraie, mais l'implication $P \vee Q \rightarrow P \wedge Q$ est fausse lorsque P est vraie et Q est fausse par exemple.

1.5. Résumé

Il y a deux valeurs booléennes V/F (Vrai/Faux, ou T/F *True/False*, ou 1/0). Nous avons défini les cinq connecteurs logiques de base.

Symbole	Nom	Définition
$\neg$	NON	$\neg P$ est vrai ssi P est faux
$\wedge$	ET	$P \wedge Q$ est vrai ssi P et Q sont vrais
$\vee$	OU	$P \vee Q$ est vrai ssi P ou Q est vrai
$\rightarrow$	implication	$\neg P \vee Q$
$\leftrightarrow$	équivalence	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Le connecteur $\neg$ est un connecteur *unaire*, car il s'applique à un seul paramètre (comme une fonction d'une variable) alors que les autres sont des connecteurs *binaires* (par exemple on pourrait écrire $P \wedge Q$ sous la forme $\wedge(P, Q)$ comme une fonction de deux variables).

2. Formules

2.1. Objectifs

Nous disposons de *variables propositionnelles* $P, Q, R, \dots$ chacune pouvant prendre la valeur Vrai ou Faux. À l'aide des connecteurs, on compose une *formule* $\mathcal{P}$, par exemple :

$$\mathcal{P} : P \wedge (Q \vee (\neg R))$$

Voici les questions qu'on se pose. Si on remplace $P, Q, R, \dots$ par des valeurs V/F, est-ce que la formule $\mathcal{P}$ est vraie ou fausse ? On peut même être plus précis :

- Est-ce qu'il existe un choix de valeurs V/F qui rende l'évaluation de $\mathcal{P}$ vraie ?
- Pour tous les choix possibles de valeurs V/F, l'évaluation de $\mathcal{P}$ est-elle vraie ?

Par exemple, pour la proposition $\mathcal{P} : P \wedge (Q \vee (\neg R))$, si on attribue la valeur V à P , F à Q et F à R , alors $\mathcal{P}$ s'évalue en $V \wedge (F \vee (\neg F))$ qui vaut V. En revanche, si on remplace (P, Q, R) par (V, F, V) , alors $\mathcal{P}$ s'évalue en F.

Bien sûr, on pourrait se poser les mêmes questions pour savoir quand $\mathcal{P}$ s'évalue en faux, mais cela revient à décider quand la formule $\neg \mathcal{P}$ s'évalue en vrai.

Si on dispose de deux formules $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, alors on peut composer des formules plus complexes $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$, $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$, etc.

Lorsque l'on dispose de deux formules $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$, l'objectif le plus important sera de comprendre le lien entre $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$. Par exemple, est-ce que $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}$ est vraie ? Est-ce que $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ est vraie ?

2.2. Définition d'une formule

On considère un **alphabet** formé par :

- un ensemble $\text{Var} = \{P, Q, R, \dots\}$ de variables propositionnelles,
- un ensemble $\text{Conn} = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ de connecteurs logiques,
- de symboles de parenthèses (et).

Une **formule** est un mot fini, formé à partir des caractères de cet alphabet ; ce mot doit être correctement parenthésé et cohérent avec l'usage des connecteurs.

Définition.

Plus précisément, l'ensemble Form de toutes les **formules** est le plus petit ensemble de mots, contenant les variables propositionnelles, tel que :

- si $\mathcal{P}$ est une formule, alors $\neg \mathcal{P}$ aussi,
- si $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont des formules, alors $(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q})$, $(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q})$ sont aussi des formules.

Remarque : on notera $P, Q, R, \dots$ (caractère droit) pour les variables propositionnelles et $\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$ (caractère calligraphique) pour les formules.

Voici des exemples de formules :

$$P \quad , \quad \neg P \quad , \quad (Q \rightarrow P) \quad , \quad ((Q \rightarrow P) \leftrightarrow Q) \quad , \quad (\neg R \rightarrow (P \vee Q))$$

Par abus de notation :

- On se permettra d'enlever les parenthèses quand elles sont totalement à l'extérieur, par exemple on écrira $Q \rightarrow P$ au lieu de $(Q \rightarrow P)$ ou lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, par exemple $P \vee Q \vee R$.
- À l'inverse, on rajoutera parfois des parenthèses superflues. Par exemple, on pourra écrire $(\neg P) \wedge Q$ au lieu de $\neg P \wedge Q$ afin d'éviter la confusion avec $\neg(P \wedge Q)$.

2.3. Table de vérité, évaluation

Pour une formule $\mathcal{P}$ qui dépend de deux variables propositionnelles P et Q , on peut déterminer quand la formule prend la valeur Vrai ou Faux selon les valeurs attribuées à P et Q . Cela se résume sous la forme d'une **table de vérité** de la formule $\mathcal{P}$:

P	Q	$\mathcal{P}$
V	V	V/F ?
V	F	V/F ?
F	V	V/F ?
F	F	V/F ?

Plus généralement, si la formule $\mathcal{P}$ dépend des variables $P_1, P_2, \dots, P_n$, une **distribution de valeurs** est un choix V/F pour la variable P_1 , un choix V/F pour la variable $P_2, \dots$. On obtient alors une **évaluation** V/F pour la formule $\mathcal{P}$.

Dans la pratique on dresse la table de vérité de la formule $\mathcal{P}$.

Exemple.

Soit :

$$\mathcal{P} : \quad (P \wedge Q) \vee (\neg P)$$

On dresse la table de vérité de $\mathcal{P}$ à l'aide des tables intermédiaires de $P \wedge Q$ et $\neg P$.

P	Q	$P \wedge Q$	$\neg P$	$\mathcal{P}$
V	V	V	F	V
V	F	F	F	F
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

Dans les chapitres « Quels connecteurs sont utiles ? » et « Théorème de compacité », on présentera une distribution de valeurs comme une fonction $v : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$ qui s'étend sur l'ensemble des formules afin d'obtenir une évaluation $v(\mathcal{P})$.

2.4. Équivalence logique

Définition.

Deux formules $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont **logiquement équivalentes** si elles ont la même table de vérité. On note alors :

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$$

Cela signifie que les formules $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ s'évaluent à Vrai en même temps et à Faux en même temps, quel que soit le choix des valeurs de vérité.

Il existe un lien direct avec le connecteur d'équivalence $\leftrightarrow$. En effet, $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ signifie que $(\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q})$ est une tautologie (c'est-à-dire toujours évaluée à Vrai), voir la Section 4.

Exemple.

1. $\neg\neg P \equiv P$ (double négation)
2. $\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P) \wedge (\neg Q)$ (loi de De Morgan)
3. $(P \wedge Q) \rightarrow R \equiv (\neg(P \wedge Q)) \vee R \equiv ((\neg P) \vee (\neg Q)) \vee R$

2.5. Équivalences logiques usuelles

idempotence	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$
commutativité	$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \vee \mathcal{P}$
associativité	$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R})$	$(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R})$
distributivité	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R})$	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R})$
absorption	$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \equiv \mathcal{P}$	$\mathcal{P} \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \equiv \mathcal{P}$
lois de De Morgan	$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \equiv (\neg \mathcal{P}) \vee (\neg \mathcal{Q})$	$\neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \equiv (\neg \mathcal{P}) \wedge (\neg \mathcal{Q})$
contraposée	$\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \equiv (\neg \mathcal{Q}) \rightarrow (\neg \mathcal{P})$	

Ce sont les plus classiques. Il en existe beaucoup d'autres !

3. Connecteurs (suite)

Nous apportons des précisions et des commentaires sur nos connecteurs favoris.

3.1. Vrai/Faux, négation

Il y a exactement deux valeurs booléennes $\{V, F\}$ (ou $\{0, 1\}$), ni plus, ni moins ! Ce qui fait que si une variable P ou une formule $\mathcal{P}$ n'est pas évaluée à Faux, c'est qu'elle vaut Vrai. Et réciproquement. Il n'y a donc pas de réponse « peut-être ». Cela a les conséquences suivantes :

- **Principe du tiers exclu** :

$$\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P} \quad \text{est toujours Vrai}$$

L'expression « tiers exclu » signifie qu'il n'y a pas d'autre choix que V/F.

- Principe de non-contradiction :

$$\mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{P} \quad \text{est toujours Faux}$$

- Loi de la double négation :

$$\neg \neg \mathcal{P} \equiv \mathcal{P}$$

On verra un peu plus tard dans la Section 4 une nouvelle écriture de ce qui est vrai/faux :

$\top$: formule qui s'évalue toujours à Vrai

Ce symbole désigne une formule qui s'évalue toujours à V (T en anglais, d'où le symbole). Il se lit « toujours Vrai » ou « tautologie » ou *top*.

Sa contrepartie est le symbole renversé :

$\perp$: formule qui s'évalue toujours à Faux

Ainsi on peut écrire :

$$\mathcal{P} \vee \neg \mathcal{P} \equiv \top \quad \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{P} \equiv \perp$$

Quelle est la différence entre V et $\top$? V est une valeur, alors que $\top$ est une formule qui s'évalue toujours à V. Si on identifie plutôt les valeurs booléennes à 0/1, alors 1 est une constante, tandis que $\top$ est la fonction constante égale à 1.

3.2. $\wedge$ (ET), $\vee$ (OU)

Dans notre liste d'équivalences logiques, nous avons :

$$\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \wedge \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q} \vee \mathcal{P} \quad \text{commutativité}$$

et aussi :

$$(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \wedge \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \quad (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \vee \mathcal{R} \equiv \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \quad \text{associativité}$$

Par conséquent, on s'autorise à écrire $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}$ et $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q} \vee \mathcal{R}$, sans parenthèses. Enfin :

$$\mathcal{P} \wedge (\mathcal{Q} \vee \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \vee (\mathcal{P} \wedge \mathcal{R}) \quad \mathcal{P} \vee (\mathcal{Q} \wedge \mathcal{R}) \equiv (\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{P} \vee \mathcal{R}) \quad \text{distributivité}$$

Le connecteur $\wedge$ (ET) est analogue à la multiplication $\times$, tandis que $\vee$ (OU) est analogue à l'addition $+$: $a \times b = b \times a$ (commutativité), $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (associativité), $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ (distributivité).

Les lois de De Morgan se résument par l'incantation « la négation d'un ET est un OU » et « la négation d'un OU est un ET » :

$$\neg(\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}) \equiv \neg \mathcal{P} \vee \neg \mathcal{Q} \quad \neg(\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}) \equiv \neg \mathcal{P} \wedge \neg \mathcal{Q}$$

3.3. $\rightarrow$ (implication)

Par définition :

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$$

et sa table de vérité est :

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Il y a plusieurs points à intégrer concernant les implications.

Pas de causalité.

Il faut bien comprendre que $P \rightarrow Q$ (ici avec des variables propositionnelles) ne signale pas un lien de causalité mais plutôt une constatation : est-ce que si P est vraie alors Q est aussi vraie ?

Voici un exemple qui devrait faire hurler tous vos profs de maths.

Exemple.

Soit n un entier :

$$n \text{ est impair} \rightarrow n \text{ est premier}$$

Tous vos profs vous diront que cette implication est fausse, mais ce n'est pas vrai ! La confusion vient du fait qu'on a l'habitude de comprendre cette phrase par « tout nombre impair est aussi un nombre premier », ce qui est bien sûr faux. Mais ici n est fixé et sa valeur n'était pas précisée et donc l'implication peut être vraie ou fausse selon la valeur de n .

- si $n = 3$, alors « n est impair $\rightarrow n$ est premier » est vraie, car P : « 3 est impair » et Q : « 3 est premier » sont vraies.
- si $n = 15$, alors « n est impair $\rightarrow n$ est premier » est fausse, car P : « 15 est impair » est vraie alors que Q : « 15 est premier » est fausse.
- si $n = 4$, alors « n est impair $\rightarrow n$ est premier » est vraie ! En effet P : « 4 est impair » est fausse et donc $P \rightarrow Q$ est vraie.

Lorsque P est faux alors $P \rightarrow Q$ est vrai !

C'est bien sûr clair d'après la définition $(\neg P) \vee Q$. Essayons de justifier pourquoi c'est naturel. Posons-nous la question : « quand est-ce qu'on veut que P implique Q soit faux ? ». La réponse est : « si P est vrai et Q est faux » (c'est comme avoir trouvé un contre-exemple). Dans tous les autres cas, $P \rightarrow Q$ est vrai, donc y compris lorsque P est faux.

Cela se retrouve dans le langage courant :

« Si tu as raison, alors moi je suis le pape. »

Sous-entendu, « Tu as tort. » Dans le même genre :

« Je le ferai quand les poules auront des dents. »

Sous-entendu, « Je ne le ferai pas. » C'est l'implication « poules avec dents $\rightarrow$ action » qui est toujours vraie avec ou sans action.

À propos des démonstrations.

De $P \rightarrow Q$, on ne peut pas déduire que Q est vrai. Ce que l'on verra dans la suite s'appelle le *modus ponens* et est la base de nos raisonnements :

Si P est vrai et si $P \rightarrow Q$ est vrai, alors Q est vrai.

C'est l'erreur que l'on fait à force d'habitude quand on écrit $P \implies Q$: on suppose implicitement que P est vrai et on en déduit que Q est vrai.

Enfin $\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R}$ ne dénote pas une chaîne de conséquences, mais c'est par définition la formule :

$$\mathcal{P} \rightarrow (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{R})$$

3.4. $\leftrightarrow$ (équivalence)

Pour qu'une équivalence soit vraie, il faut que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ soient vraies en même temps, et fausses en même temps. Par définition :

$$\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \equiv (\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{Q}) \wedge (\mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{P})$$

On peut formuler les mêmes avertissements que pour l'implication : quand on écrit $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ cela ne signifie pas que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont toujours évaluées à vrai, mais juste qu'elles s'évaluent à vrai en même temps.

3.5. D'autres connecteurs

Un **connecteur à n places** est une fonction $f : \{V, F\}^n \rightarrow \{V, F\}$, ou, si vous préférez, une fonction $f : \{0, 1\}^n \rightarrow \{0, 1\}$.

- $n = 1$. $\neg$ est un connecteur unaire (c'est une fonction à une variable). On peut aussi avoir besoin de l'identité id qui envoie V sur V et F sur F .
- $n = 2$. $\wedge$ est un connecteur binaire (comme une fonction de deux variables). Sauf qu'on écrit $P \wedge Q$ au lieu de $\wedge(P, Q)$.
- $n = 2$. Le **ou exclusif** $\oplus/\text{XOR}$ est un autre connecteur binaire :

$$P \oplus Q \text{ est vrai si exactement l'une des variables est vraie.}$$
- $n = 2$. Le connecteur $\uparrow/\text{NAND}$, aussi appelé symbole de Sheffer, est défini comme la négation du ET :

$$P \uparrow Q = \neg(P \wedge Q)$$

On listera tous les connecteurs binaires dans le chapitre « Quels connecteurs sont utiles ? ».

- Pour n quelconque, on peut définir un connecteur à n places, en donnant la table de vérité en fonction des valeurs affectées aux variables $P_1, P_2, \dots, P_n$. Cette table a 2^n lignes. On verra, toujours dans le chapitre « Quels connecteurs sont utiles ? », pourquoi on n'a pas vraiment besoin de ces connecteurs.

4. Formules (suite)

4.1. Formules satisfaisables

Soient $P_1, P_2, \dots, P_n$ des variables propositionnelles. Une distribution de valeurs ν associe à chaque variable P_i une valeur de vérité $\nu(P_i)$ qui est V ou F (ou une valeur $0/1$). On peut alors associer une valeur V/F , notée $\nu(\mathcal{P})$, à n'importe quelle formule $\mathcal{P}$.

Exemple.

On considère trois variables P, Q, R et la formule :

$$\mathcal{P} : (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$$

Considérons la distribution de valeurs (V, F, F) (c'est-à-dire $\nu(P) = V, \nu(Q) = F, \nu(R) = F$), alors, lorsque l'on substitue ces valeurs dans $\mathcal{P}$, on obtient :

$$\nu(\mathcal{P}) = (V \wedge \neg F) \vee (F \wedge F)$$

et donc $\nu(\mathcal{P}) = V$. Par contre, pour la distribution (V, V, F) alors $\mathcal{P}$ s'évalue à F .

Définition.

- Une formule $\mathcal{P}$ est **satisfaite** pour la distribution de valeurs ν si $\mathcal{P}$ s'évalue à Vrai pour cette distribution.
- Une formule $\mathcal{P}$ est **satisfaisable**, s'il existe une distribution de valeurs pour laquelle $\mathcal{P}$ s'évalue à Vrai.

La formule $\mathcal{P} : (P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge R)$ de l'exemple précédent est satisfaisable, car on avait trouvé une distribution de valeurs qui rend $\mathcal{P}$ vraie.

4.2. Tautologie**Définition.**

- Une **tautologie** est une formule $\mathcal{P}$ qui s'évalue toujours à Vrai, quelle que soit la distribution des valeurs de vérité.
- Une **contradiction** est une formule $\mathcal{P}$ qui s'évalue toujours à Faux, quelle que soit la distribution des valeurs de vérité.

Notation :

tautologie : $\top$	contradiction : $\perp$
---------------------	-------------------------

Quelques remarques :

- Ainsi une tautologie est une formule toujours vraie (plus précisément qui s'évalue toujours à la valeur Vrai). Le terme vient du grec *tautos* (le même) et *logos* (parole) : c'est toujours la même valeur (Vrai).
- Une contradiction est une formule toujours fausse.
- Cependant, la plupart des formules ne sont ni des tautologies, ni des contradictions : elles s'évaluent à des valeurs vraies et fausses selon le choix de la distribution de valeurs.
- Une formule $\mathcal{P}$ est une contradiction si et seulement si $\neg \mathcal{P}$ est une tautologie. C'est pourquoi on s'intéressera essentiellement aux tautologies.

Exemple.

1. $P \vee \neg P$ est une tautologie (si P est Vrai, $P \vee \neg P$ est Vrai ; si P est Faux, $P \vee \neg P$ est aussi Vrai).
2. $P \wedge \neg P$ est une contradiction (c'est une formule toujours fausse, quelle que soit la valeur attribuée à P).
3. $(P \vee Q \vee R) \vee (\neg P \vee \neg Q \vee \neg R)$ est une tautologie.
4. $(P \wedge Q) \rightarrow Q$ est une tautologie.
5. $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P) \vee (\neg Q)$ est une tautologie.
6. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ est une tautologie.

Voici des exemples d'utilisation des symboles $\top/\perp$:

$$\mathcal{P} \wedge \top \equiv \mathcal{P} \quad \mathcal{P} \vee \top \equiv \top \quad \mathcal{P} \wedge \perp \equiv \perp \quad \mathcal{P} \vee \perp \equiv \mathcal{P}$$

Nous pouvons maintenant préciser le lien entre l'équivalence logique ($\equiv$) et l'équivalence ($\leftrightarrow$) :

$$\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q} \quad \text{ssi} \quad \mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q} \text{ est une tautologie}$$

Si c'est le cas, c'est-à-dire si $\mathcal{P} \equiv \mathcal{Q}$ (ou bien si $\mathcal{P} \leftrightarrow \mathcal{Q}$ est toujours vraie), alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ s'évaluent à vrai en même temps et à faux en même temps, quelle que soit l'évaluation.

Dans les sections suivantes, nous allons découvrir trois autres visions des formules et de leurs évaluations.

4.3. Portes logiques et circuits

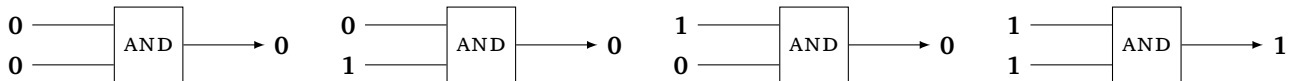
Pour se rapprocher de ce qu'il se passe au cœur d'un ordinateur on peut considérer les connecteurs comme des portes logiques. Ici les valeurs de vérité sont $\{0, 1\}$.

Porte NON/NOT.

Elle a une seule entrée et change 0 en 1, et 1 en 0.

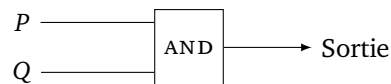


Porte ET/AND.

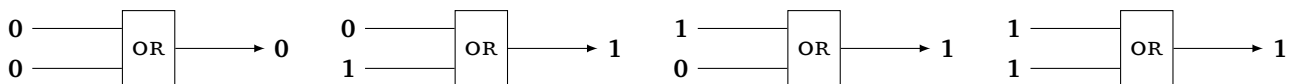


On résume l'action de la porte AND par le tableau suivant :

P	Q	Sortie
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1



Porte OU/OR.



Porte NAND.

Elle peut se réaliser comme la porte NOT(AND), c'est-à-dire la porte AND suivie de la porte NOT.

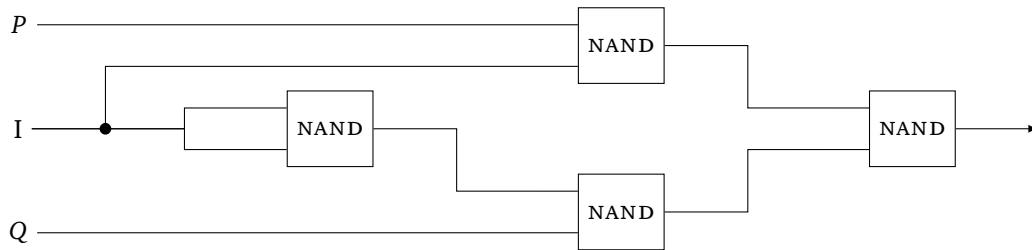


Mais nous préférons la voir comme une porte à part entière.



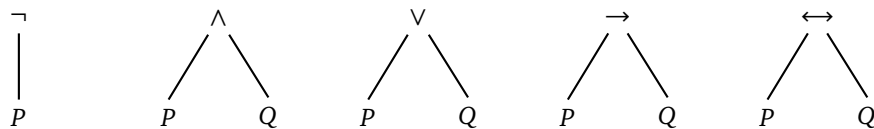
Exemple.

Un *multiplexeur* est un circuit qui aiguille un signal entre deux entrées P et Q à l'aide d'un sélecteur I . Si I vaut 1 alors la sortie du circuit est la valeur de P . Si I vaut 0 alors la sortie est la valeur de Q . Cela peut aussi être vu comme un test rudimentaire : « Si $I = 1$ faire ceci, sinon faire cela. »



4.4. Arbres

On peut aussi représenter les connecteurs par des *arbres* :

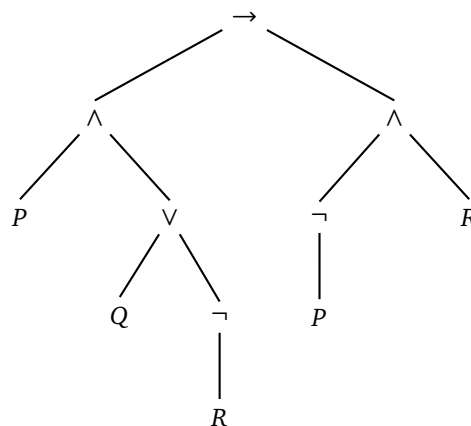


Exemple.

Considérons la formule :

$$(P \wedge (Q \vee \neg R)) \rightarrow (\neg P \wedge R)$$

L'arbre correspondant est :



L'intérêt est que la structure d'arbre est adaptée au traitement algorithmique. Un parcours préfixe en profondeur considère la racine, puis explore le sous-arbre de gauche, puis le sous-arbre de droite.

On peut aussi adopter la *notation polonaise*, c'est-à-dire écrire $\wedge PQ$ (comme une fonction de deux variables $\wedge(P, Q)$) au lieu de $P \wedge Q$. En notation polonaise, la formule de l'exemple précédent s'écrit :

$$\rightarrow \wedge P \vee Q \neg R \wedge \neg P R$$

C'est une expression particulièrement adaptée au traitement par ordinateur, car elle ne nécessite pas de parenthèses. Pour un humain, c'est plus lisible de l'écrire ainsi :

$$\rightarrow (\wedge (P) (\vee (Q) (\neg R))) (\wedge (\neg P) (R))$$

4.5. Formules algébriques

On note $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ les valeurs booléennes. Dans cette section, on fait les calculs modulo 2, c'est-à-dire qu'on écrit $1 + 1 = 0$ (en toute rigueur on devrait écrire $1 + 1 \equiv 0 \pmod{2}$). Noter que modulo 2, on a $+1 = -1$.

On note $x, y \in \{0, 1\}$. Voici les expressions algébriques qui transposent l'action des connecteurs :

$$\begin{aligned}\neg x &= 1 + x \\ x \wedge y &= x \times y \\ x \vee y &= x + y - xy \quad \text{ou inclusif} \\ x \oplus y &= x + y \quad \text{ou exclusif}\end{aligned}$$

Cela se justifie facilement, par exemple, si $x = 0$, alors $1 + x = 1$, et si $x = 1$ alors $1 + x = 1 + 1 = 0$. Donc $1 + x$ correspond bien à $\neg x$.

De même $x \times y$ ne peut valoir 1 que si $x = 1$ et $y = 1$.

Exemple.

Ces expressions algébriques peuvent fournir des preuves. Par exemple la double négation se justifie par :

$$\neg\neg x = \neg(1 + x) = 1 + (1 + x) = 1 + 1 + x = x$$

Voici une preuve de la loi de De Morgan sur la négation d'un ET, $\neg(x \wedge y) = (\neg x) \vee (\neg y)$:

$$(\neg x) \vee (\neg y) = (1 + x) \vee (1 + y) = (1 + x) + (1 + y) - (1 + x)(1 + y) = x + y - 1 - x - y - xy = 1 + xy = \neg(xy)$$

On a utilisé $-1 = +1$, donc $-xy = xy$.

Exercices

Vrai/faux, connecteurs

Exercice 1. Soit P : « $2 \times 2 = 5$ » et Q : « $4 + 4 > 7$ ». Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses : $\neg P$, $\neg Q$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$, $P \leftrightarrow Q$.

Exercice 2. On suppose P vraie. Pour quelles valeurs de Q les propositions suivantes sont-elles vraies : $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$, $P \leftrightarrow Q$? Même question si cette fois on suppose P fausse.

Formules

Exercice 3. Parmi les mots suivants lesquels sont des formules (au sens strict de la définition) :

$$\neg\neg P \quad (\neg P \vee Q \wedge R) \quad (P \rightarrow (Q \wedge (R \wedge S))) \quad (P, Q \rightarrow R) \quad ((P \wedge \neg Q \rightarrow)(Q \vee R))$$

Exercice 4. Dresser la table de vérité pour $\neg(P \vee Q)$ et celle pour $(\neg P) \wedge (\neg Q)$. En déduire la loi de De Morgan pour $\vee$.

Exercice 5. Prouver les formules d'associativité et de distributivité suivantes :

$$P \vee (Q \vee R) \equiv (P \vee Q) \vee R \quad P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$$

Exercice 6. Montrer les équivalences logiques suivantes :

$$P \rightarrow Q \wedge R \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R) \quad P \vee Q \rightarrow R \equiv (P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R) \quad P \leftrightarrow Q \equiv (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$$

Traduire ces équivalences par une phrase en français.

Connecteurs (suite)

Exercice 7. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies (elles sont toujours vraies, quelles que soient les valeurs de P et Q) :

$$P \vee (P \rightarrow Q) \quad (P \wedge Q) \rightarrow P \quad (P \rightarrow Q) \vee (P \rightarrow \neg Q) \quad (P \rightarrow Q) \vee (\neg P \rightarrow Q)$$

Exercice 8. Pour chacune des formules suivantes, trouver une formule d'expression la plus simple possible qui lui est logiquement équivalente :

$$Q \vee (P \wedge Q) \quad P \wedge (P \vee Q) \quad P \wedge (\neg P \vee Q) \quad (P \vee Q) \rightarrow (P \wedge Q)$$

Exercice 9. Soit $x \in \mathbb{R}$, $P : « x \geq 2 »$ et $Q : « x^2 \geq 4 »$. Trouver toutes les valeurs $x \in \mathbb{R}$, telles que $P \rightarrow Q$ soit vraie. Même question avec $Q \rightarrow P$, puis $P \leftrightarrow Q$.

Exercice 10.

1. Déterminer la table de vérité de $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$, puis celle de $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$. Conclusion ?
2. Montrer que $P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R) \equiv (P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R$.
3. Montrer que $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \equiv (P \wedge Q) \rightarrow R \equiv Q \rightarrow (P \rightarrow R)$.

Exercice 11. On rappelle que $P \oplus Q$ désigne le « ou exclusif » (c'est vrai lorsque P est vrai, ou Q est vrai, mais pas les deux).

1. Calculer la table de vérité de $P \oplus Q$.
2. Montrer que $P \oplus Q$ revient à « $P \neq Q$ », c'est-à-dire qu'on a $P \oplus Q \equiv (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$. Quel est le lien entre $\oplus$ et $\leftrightarrow$?
3. Montrer que $\oplus$ est commutative et associative.
4. Exprimer $P \wedge (Q \oplus R)$ uniquement avec les connecteurs $\wedge$, $\vee$ et $\neg$. Idem avec $P \oplus (Q \wedge R)$.

Exercice 12. Soit $P_1, P_2, \dots, P_n$, avec $n \geq 1$. Quand est-ce que $P_1 \oplus P_2 \oplus \dots \oplus P_n$ est vraie ?

Formules (suite)

Exercice 13. Les formules suivantes sont-elles satisfaisables ? Sont-elles des tautologies ?

$$P \wedge Q \rightarrow P \quad (P \vee Q) \wedge (\neg P \vee \neg Q) \quad P \vee (Q \wedge \neg Q) \leftrightarrow P \quad (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P) \\ ((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \vee R) \rightarrow (Q \vee S))$$

Exercice 14. Montrer que les formules suivantes sont des tautologies :

1. $P \wedge (P \rightarrow Q) \rightarrow Q$ (*modus ponens*)
2. $(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q \rightarrow \neg P$ (*modus tollens*)
3. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ (contraposition)
4. $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \rightarrow \perp)$ (raisonnement par l'absurde)
5. $((P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)) \rightarrow (P \rightarrow R)$ (syllogisme/transitivité de l'implication).
6. $(P \wedge \top) \leftrightarrow P$

Exercice 15.

1. Construire le circuit pour $P \wedge (Q \vee R)$ et celui pour $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$. Vérifier qu'ils produisent les mêmes sorties.
2. Montrer qu'en utilisant uniquement des portes NAND, on peut construire des circuits dont les sorties sont identiques à l'action de $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Exercice 16. Pour chacune des formules suivantes, construire l'arbre associé et donner l'expression selon la notation polonaise :

$$\neg P \wedge (Q \vee (P \wedge R)) \qquad ((P \vee Q) \wedge \neg R) \rightarrow (P \wedge (\neg Q \wedge R))$$

Exercice 17.

1. Justifier la formule algébrique $x \vee y = x + y - xy$.

2. À l'aide des formules algébriques, montrer :

$$x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z \qquad x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z \qquad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$$

3. Calculer $x \wedge (y \oplus z)$ et $(x \wedge y) \oplus (x \wedge z)$. Conclusion ?

4. Trouver une formule algébrique pour $x \rightarrow y$. Idem pour $x \leftrightarrow y$.

5. À l'aide des formules algébriques, montrer $x \rightarrow y = \neg y \rightarrow \neg x$.