Droites et vecteurs

1. Géométrie

La ***distance*** entre $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Le ***milieu*** M de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+y_A}{2}, \frac{x_B+y_B}{2}\right)$.

2. Vecteurs

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points du plan, le ***vecteur*** de A à B est $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.
La ***norme*** d'un vecteur $\vec{v} = (x, y)$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.
Addition. $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$.
Multiplication par un scalaire. $k\vec{u} = (kx, ky)$.
Opposé. $-\vec{u} = (-x, -y)$.
Produit scalaire. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Vecteurs orthogonaux. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Si $\vec{u} = (a, b)$ alors $\vec{n} = (-b, a)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{v}$.
Vecteurs colinéaires. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** (ou ***parallèles***) si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$). $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.
On note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le ***déterminant***.

3. Droites

Équation cartésienne.

$$ax + by + c = 0$$

avec a, b et c des nombres réels (et a et b non tous les deux nuls).
Vecteur directeur. $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$
Vecteur normal. $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Équation réduite.

$$y = ax + b$$

avec a et b des nombres réels (et a non nul).

- a est la ***pente*** ou ***coefficient directeur***,
- b est l'***ordonnée à l'origine***.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de la droite, alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. On trouve ensuite l'ordonnée à l'origine à l'aide de la relation $y_A = ax_A + b$.
Équation paramétrique.

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

avec $A(x_A, y_A)$ un point de la droite et $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de la droite.
Droites parallèles. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Ainsi $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c' = 0$ sont deux droites parallèles si et seulement si $\det\left(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}\right) = 0$ c'est-à-dire

$$ab' - a'b = 0$$

Droites perpendiculaires. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Ainsi $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c' = 0$ sont deux droites perpendiculaires si et seulement si

$$aa' + bb' = 0.$$