Fonctions

1. Fonction polynomiale

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Soit $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le *discriminant*.

Racines

— Si $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions réelles :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation $P(x) = 0$ a une solution double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

Factorisation

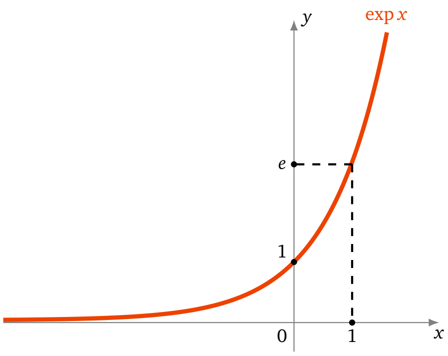
— Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
— Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$.

Signe

— Si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est-à-dire sur $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$).
— Si $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

2. Exponentielle

La fonction *exponentielle* : $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

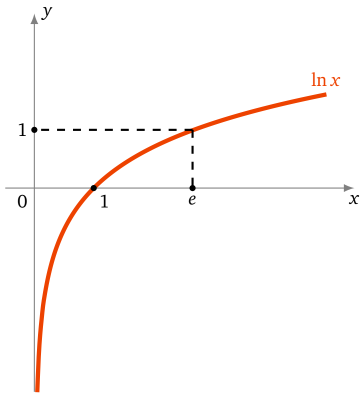


La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

— $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
— $\exp(nx) = (\exp x)^n$
— $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,
— $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
— $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$,
— $\exp(1) = e \simeq 2,718\ldots$

3. Logarithme

Le *logarithme népérien* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.



— $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (pour tout $a, b > 0$),
— $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
— $\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$),
— ln est une fonction continue, strictement croissante,
— $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,
— $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$,
— $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
— $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

Lien logarithme/exponentielle :

$$\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$$

$$\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\boxed{y = \exp(x) \iff x = \ln(y)}$$