

# Calculs algébriques

## 1. Identités remarquables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

## 2. Fractions

Une **fraction** est  $\frac{a}{b}$  avec  $a, b$  des nombres réels.  $a$  est le **numérateur**,  $b$  est le **dénominateur**. Ce dénominateur ne doit pas être nul :  $b \neq 0$ .

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

$$\frac{a}{1} = a \quad \frac{0}{b} = 0 \quad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

## 3. Puissances

Pour  $x \in \mathbb{R}$  et  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ termes}}$$

convention :  $x^0 = 1$      $x^1 = x$      $x^2 = x \times x$     ...

Pour  $x \neq 0$ , on pose  $x^{-1} = \frac{1}{x}$ . Et  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ .

Pour  $n, a, b \in \mathbb{Z}$  :

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

$x^{a^b}$  signifie  $x^{(a^b)}$

### Puissances de 10

$10^0$	$10^1$	$10^2$	$10^3$	$10^4$	$10^5$	$10^6$	$10^9$
1	10	100	1000	10 000	100 000	un million	un milliard
			kilo			mega	giga

$10^0$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-4}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$
1	0,1	0,01	0,001	0,0001	un millionième	un milliardième
			milli		micro	nano

Pour les puissances positives l'exposant  $n$  est le nombre de zéros du nombre : par exemple  $10\,000 = 10^4$  car  $10\,000$  a 4 zéros.

Pour les puissances négatives l'exposant est  $n$  est aussi le nombre de zéros du nombre, en comptant le zéro avant la virgule : par exemple  $0,001 = 10^{-3}$  car  $0,001$  a un total de 3 zéros (1 avant la virgule et 2 après).

### Puissances de 2

$2^0$	$2^1$	$2^2$	$2^3$	$2^4$	$2^5$	$2^6$	$2^7$	$2^8$	$2^9$	$2^{10}$
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

### Carrés

$2^2$	$3^2$	$4^2$	$5^2$	$6^2$	$7^2$	$8^2$	$9^2$	$10^2$	$11^2$	$12^2$	$13^2$	$14^2$	$15^2$
4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

## 4. Racine carrée

La **racine carrée** d'un réel  $x \geq 0$  est le réel  $\sqrt{x} \geq 0$  tel que  $(\sqrt{x})^2 = x$ .  
Pour  $x, y \geq 0$ ,

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \quad x, y \geq 0$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \quad x \geq 0, y > 0$$

Pour  $x > 0$ ,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Par exemple :  $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Pour  $x \geq 0$ ,

$$(\sqrt{x})^2 = x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

(Attention pour  $x < 0$ ,  $\sqrt{x^2} = -x$  !)

Pour  $x \geq 0, n \in \mathbb{Z}$  :

$$(\sqrt{x})^n = \sqrt{x^n}$$

Pour  $x, y \geq 0$  :

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$$

Attention !  $\sqrt{a+b}$  n'est pas égal à  $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ .

## 5. Inégalités

Définitions.  $a \leq b \iff b - a \in [0, +\infty[$ .  $a < b \iff b - a \in ]0, +\infty[$ .

Addition. Si  $a \leq b$  et  $k \in \mathbb{R}$  alors  $a + k \leq b + k$ .

Multiplication par un réel positif. Si  $a \leq b$  et  $k \geq 0$  alors  $ka \leq kb$ .

Multiplication par un réel négatif. Attention ! Si  $a \leq b$  et  $k < 0$  alors  $ka \geq kb$ . En particulier si  $a \leq b$  alors  $-a \geq -b$ . Par exemple  $2 \leq 3$  et  $-2 \geq -3$ .

Inverse. Attention ! Si  $0 \leq a \leq b$  et alors  $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ . Par exemple  $2 \leq 3$  et  $\frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$ .

Autre formule d'addition. Si  $a \leq b$  et  $c \leq d$  alors  $a + c \leq b + d$ .

Autre formule de multiplication. Si  $0 \leq a \leq b$  et  $0 \leq c \leq d$  alors  $ac \leq bd$ .