FORMULES

DE MATHÉMATIQUES

Sommaire

1. Quelques mathématicien·ne·s

1.1. Antiquité

Thalès *(v. 625 av. J.-C. – v. 545 av. J.-C).* Savant grec, né à Milet (aujourd'hui en Turquie). Il cherche à expliquer le monde en se basant sur les sciences et non la mythologie. Les connaissances grecques se basent probablement sur la science égyptienne et les mathématiques babyloniennes (Mésopotamie). Géomètre, il travaille à la fois sur les figures et en particulier les triangles vus comme des objets théoriques, mais aussi sur les applications pratiques de la géométrie. On lui attribue la mesure de la hauteur des pyramides d'Égypte grâce à leurs ombres. Son nom reste associé au fameux théorème de Thalès.

Pythagore *(v. 580 av. J.-C. – v. 495 av. J.-C).* Savant et philosophe grec. Son enseignement est reconnu avec de nombreux disciples et influencera Platon et Aristote. Pour l'école pythagoricienne les mathématiques sont la base pour modéliser le monde. Pythagore et son école s'intéressent à la fois à la géométrie et aux nombres, c'est par exemple le cas du célèbre théorème qui porte le nom de Pythagore et relie une figure géométrique à des nombres. Il aurait dit « Tout l'univers repose sur l'ensemble des entiers naturels » car on pensait à l'époque que toutes les longueurs pouvait être calculées par des nombres rationnels.

Euclide *(vers 300 av. J.-C.).* Mathématicien grec qui dans les 13 livres des *Éléments* donne la première présentation systématique de la géométrie du plan et de l'espace, avec une approche déductive et rigoureuse des mathématiques : à partir d'axiomes et de définitions, on énonce des théorèmes qui font l'objet de démonstrations. Dans le livre X on trouve la démonstration de l'irrationalité de $\sqrt{2}$. Son nom reste associé à la division euclidienne, l'algorithme d'Euclide, la géométrie euclidienne (droite, plan, conique,...).

Archimède *(v. 287 av. J.-C. – 212 av. J.-C.).* Savant grec de Syracuse (Sicile), il est fameux pour son *eurêka* associé à la découverte de la poussée d'Archimède. Il est à l'origine de nombreuses inventions et d'améliorations : engrenages, vis sans fin, leviers, catapultes et autres machines de guerre. Ses travaux mathématiques portent sur la géométrie, il obtient l'encadrement $\frac{223}{71} < \pi < \frac{22}{7}$ à l'aide de polygones encadrant un cercle. Concentré à dessiner des figures sur le sol, il meurt lors d'une attaque romaine de Syracuse qu'il n'a pas vu venir, ayant lancé à un soldat romain « Ne dérange pas mes cercles ! »

Hypatie d'Alexandrie *(v. 355 à 370 – 415).* Astronome, mathématicienne et philosophe grecque d'Alexandrie (l'Égypte étant sous contrôle de l'empire romain). Comme les autres savants de l'époque, son travail principal consiste à commenter les travaux de ses prédécesseurs. Elle annote l'*Almageste* de Ptolémée (v. 100 – v. 160) qui est un livre d'astronomie où la Terre est au centre de l'univers. Elle y améliore l'algorithme de division des entiers. Elle commente aussi le traité *Arithmétique* de Diophante et construit des outils astronomiques comme des astrolabes permettant aux marins de s'orienter grâce à la position des étoiles.

1.2. Moyen-âge

Muhammad ibn Al-Khwarizmi *(v. 780 – v. 850).* Savant perse né dans l'actuel Ouzbékistan et mort à Bagdad (actuel Irak). Ses travaux portent sur les mathématiques, l'astronomie et la géographie. Son livre *Abrégé de calculs* est à l'origine du mot *algèbre*, il y présente des méthodes pour résoudre les équations de degré 1 et 2. Il utilise le système de numération décimale emprunté aux indiens. Il s'attache à présenter des méthodes systématiques pour résoudre les problèmes d'algèbre. Ses présentations se font sur des exemples numériques car on ne dispose pas encore des notation avec des lettres. Son nom a donné le mot *algorithme*.

Léonard de Pise - Fibonacci *(v. 1170 – v. 1250).* Mathématicien italien, considéré comme l'un des plus grands mathématiciens du moyen-âge. Dans son livre *Liber abaci* (le livre des calculs), il introduit en Europe le système de numération décimale indo-arabe afin de remplacer l'usage des chiffres romains. Les deux innovations sont l'introduction d'une notation pour les dix chiffres et en particulier du zéro, et le fait que la valeur des nombres dépend de la position de ces chiffres (les unités à droite, puis les dizaines...). Il modélise aussi l'évolution théorique d'une population de lapins dans la *suite de Fibonacci* qui est définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ puis la formule de récurrence $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ lorsque $n \geqslant 0$. Les premières valeurs sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$

1.3. Renaissance

John Napier *(1550–1617).* Mathématicien, astronome et théologien écossais (nom francisé en Jean Neper). Il cherche des moyens de rendre plus efficace les calculs courants, en particulier pour l'astronomie et la navigation où il y a beaucoup de calculs avec de grands nombres. Il calcule une table de logarithmes longue de 90 pages qui associe un produit à une somme, permettant ainsi d'obtenir le résultat d'une multiplication par une simple addition et la lecture de la table. Le logarithme permet à Kepler de découvrir expérimentalement sa troisième loi. Ces tables seront améliorées pour atteindre une précision de 14 décimales et resteront en usage jusqu'à l'avènement des calculatrices. En langage moderne, la table correspond à l'identité $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$. L'identité $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$ permet de calculer facilement des racines carrées. Son nom reste attaché au *logarithme népérien*, les logarithmes dans d'autres bases s'obtenant par $\log_b(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(b)}$.

René Descartes *(1596–1650).* Philosophe et mathématicien français. Il introduit la notation avec des lettres : a, b, $c\ldots$ pour les paramètres, x, y, z pour les inconnues et aussi la notation d'exposant $x2$ (pour x^2), ce qui rend plus lisibles les textes et facilite les calculs. Il se fixe comme objectif de ramener les problèmes de géométrie à des équations algébriques grâce aux coordonnées (x, y) dans ce qu'on appelle aujourd'hui un repère *cartésien*. La *méthode de Descartes* consiste en quatre règles pour résoudre des problèmes de façon scientifique : (i) S'assurer de bien comprendre la question en se l'appropriant. (ii) Décomposer le problème en questions plus simples. (iii) Ordonner ces questions logiquement et par ordre de difficulté puis les résoudre une à une. (iv) Vérifier soigneusement l'ensemble du raisonnement.

Pierre de Fermat *(v. 1605–1665).* Magistrat de la région toulousaine et esprit universel, il s'intéresse à plusieurs domaines scientifiques. En optique, il découvre le principe qui affirme que la lumière se propage toujours suivant le trajet de durée minimale. Sa correspondance avec Pascal jette les bases du calcul des probabilités. Son nom reste attaché à des résultats d'arithmétique : « si p est premier $a^p \equiv a \pmod{p}$ » (le petit théorème de Fermat). Il énonce le « grand théorème de Fermat » : « Si $n > 2$, l'équation $x^n + y^n = z^n$ n'a pas de solution avec x, y, z entiers strictement positifs. » Dans une note, il affirme en avoir découvert une démonstration mais qu'il n'a pas assez de place pour l'écrire. Cet énoncé restera pendant plus de 300 ans une des plus grandes conjectures de l'histoire mathématique.

Blaise Pascal *(1623–1662).* Savant français connu pour ses travaux en mathématiques, physique, théologie et philosophie. Au niveau mathématique, il participe à la création de nouveaux domaines : les probabilités et la géométrie projective. Pour aider son père dans son travail de comptabilité, il invente la première machine à calculer, la *Pascaline*, capable d'additionner et soustraire. Il est le premier à expliciter un raisonnement par récurrence. Son nom reste attaché au triangle de Pascal (connu des mathématiciens perses et chinois plusieurs siècles auparavant). Par ses connaissances en combinatoire, il donne un sens mathématique au hasard : c'est l'invention des probabilités.

1.4. Le calcul différentiel

Isaac Newton *(1643–1727).* Mathématicien, physicien, astronome et théologien. Dans les *Principia Mathematica* (1687), dont la traduction française est due à Émilie du Châtelet, il définit le concept de force (magnitude et direction). La somme de deux forces peut alors être représentée par la diagonale d'un parallélogramme. Reconnu comme le fondateur de la mécanique classique avec sa théorie de la gravitation universelle, en optique il développe une théorie de la couleur. En mathématiques, il est considéré comme l'un des inventeurs du calcul infinitésimal. Il passe aussi une grande partie de son temps à étudier l'alchimie afin de transformer le plomb en or. Son nom reste attaché à de nombreux théorèmes : la méthode de Newton (pour approcher le zéro d'une fonction), la formule du binôme de Newton $(a+b)^r$ (avec un exposant r pouvant être un nombre rationnel).

Gottfried Wilhelm Leibniz *(1646–1716).* Philosophe, savant aux multiples facettes et conseiller politique allemand. Durant sa vie il échange plus de 20 000 lettres avec des savants de toute l'Europe. Avec Newton, il joue un rôle majeur dans l'invention du calcul infinitésimal (limite, dérivée,...). Il introduit les notations $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ pour la dérivée et $\int f$ pour l'intégrale. Il étudie aussi en détail l'écriture binaire des entiers. Il s'intéresse aux fonctions classiques (logarithme, exponentielle,...) et leur développement en série entière ; il est le premier à étudier la fonction $x \mapsto a^x$.

Leonhard Euler *(1707–1783).* Savant suisse prolifique, il aborde l'ensemble de branches des mathématiques (analyse, nombres complexes, graphes, arithmétique...). Par son travail, il contribue à la compréhension et à la diffusion du calcul infinitésimal au long du XVIIIe siècle. Il introduit la notation $f(x)$ pour une fonction, il popularise l'usage de la notation π (pour $3.14\ldots$), le symbole Σ pour les sommes et i pour le nombre complexe avec $\mathrm{i}^2 = -1$. Devenu aveugle, il continue quand même de travailler.

La constante d'Euler γ est la limite entre la série harmonique et le logarithme : $\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n) = 0.577\ldots$

Augustin-Louis Cauchy *(1789–1857).* Étudiant brillant et scientifique aux travaux abondants, il a vécu durant la période troublée d'après la Révolution française. Dans le cadre de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, il s'attache à donner une définition rigoureuse d'une suite et de sa limite. Il est considéré comme ayant posé les bases de l'analyse moderne. Son nom reste attaché à de nombreuses notions d'analyse : suite de Cauchy, règle de Cauchy pour les séries, théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équations différentielles, la formule intégrale de Cauchy en analyse complexe.

1.5. La naissance de l'algèbre moderne

Évariste Galois *(1811–1832).* Mathématicien français mort très jeune dans un duel pour une obscure histoire romantico-politique. Une équation polynomiale de degré 2 se résout « par radicaux », c'est-à-dire que les racines s'expriment en fonction des coefficients à l'aide d'expression faisant intervenir des racines carrés. Il existe de telles formules pour les polynômes de degré 3 et degré 4. Niels Abel (1802–1829) prouve que de telles formules n'existent pas pour un polynôme quelconque de degré 5. Galois traite le cas d'un degré quelconque. Il détermine exactement quels sont les polynômes résolubles par radicaux en associant à chaque polynôme un groupe de permutation de ses racines. Ses travaux ne sont ni compris, ni reconnus de son vivant. Pourtant cette nouvelle notion de groupe sera à la base des structures algébriques et des mathématiques modernes.

Sophie Germain *(1776–1831).* Née à Paris, elle se forme seule aux mathématiques à l'aide de livres. Elle converse par lettres avec Lagrange et Gauss sous le pseudonyme de M. Leblanc avant de révéler qu'elle est une femme. Elle travaille sur les équations différentielles et l'arithmétique et en particulier sur la recherche d'une preuve du grand théorème de Fermat. Les nombres premiers de Germain sont des entiers p tels que p et $2p+1$ soient tous les deux des nombres premiers. La question de savoir s'il existe une infinité de tels nombres est toujours ouverte.

Carl Friedrich Gauss *(1777–1855).* Scientifique allemand, surnommé le « prince des mathématiques ». Enfant précoce, on raconte qu'à 7 ans, répondant à un professeur, il avait été capable de calculer en quelques secondes la somme $1+2+3+\cdots+100$. Il s'intéresse à l'astronomie et au magnétisme, mais ses principaux travaux concernent l'algèbre, la géométrie, l'arithmétique et les probabilités (méthode des moindres carrés). La *distribution de Gauss* correspond à une répartition sous la forme d'une « courbe en cloche » donnée par l'équation $x \mapsto \exp(-x^2)$ (l'aire sous la courbe valant $\sqrt{\pi}$). Son nom est associé au théorème de D'Alembert-Gauss, dit théorème fondamental de l'algèbre : « Tout polynôme P à coefficients complexes de degré $n > 0$, admet exactement n racines (comptées avec multiplicités). »

Ada Lovelace *(1815–1852).* Fille du poète anglais Lord Byron. En 1837, Charles Babbage élabore les plans d'une machine mécanique qui serait capable de faire des calculs assez généraux dont les instructions sont données à l'aide de cartes perforées (comme cela existait pour les métiers à tisser et les orgues de Barbarie). Lovelace se fascine pour cette machine et est la première personne à rendre public un *algorithme*, c'est-à-dire une suite d'instructions permettant de résoudre un problème, ici le calcul des nombres de Bernoulli avec une boucle *tant que*. De plus elle est la première à avoir compris qu'une telle machine à calculer, ancêtre d'un ordinateur, pouvait avoir des applications très générales au-delà du calcul numérique.

1.6. Les temps modernes

Henri Poincaré *(1854–1912).* Né à Nancy, il aborde dans ses travaux toutes les branches des mathématiques : géométrie, équations différentielles, mécanique céleste (problème des trois corps), il étudie aussi la théorie de la relativité. C'est le fondateur de la *topologie algébrique*, il s'agit d'étudier des ensembles (des *variétés*) à bijection continue près (*homéomorphisme*). Pour de tels ensembles, il introduit un groupe, *le groupe fondamental* π_1. En 1904 il formule la conjecture suivante : « Une variété compacte de dimension 3 dont le groupe fondamental est trivial est homéomorphe à la sphère de dimension 3. » Il faudra attendre Pereleman en 2003 pour une démonstration de la conjecture de Poincaré.

David Hilbert *(1862–1943).* Grand mathématicien allemand qui a marqué l'entrée des mathématiques dans le XX^e^ siècle. Il contribue à tous les domaines : analyse, théorie des nombres, logique, et aussi à la physique. Il propose dans *Les fondements de la géométrie*, une nouvelle axiomatisation qui place au premier plan les relations entre les objets géométriques (appartenance, ordre, parallélisme, etc.) et non leur nature. En 1900 il énonce 23 problèmes fondamentaux à résoudre pour le siècle qui s'annonce. Par exemple, le 7e problème, qui sera démontré en 1934, implique que $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est un nombre *transcendant* (comme aussi π et e), c'est-à-dire qu'il n'est la racine d'aucun polynôme à coefficients entiers, en particulier $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ est irrationnel.

Emmy Noether *(1882–1935).* Mathématicienne allemande, elle est l'une des plus grandes algébristes de son époque à travers ses contributions à la théorie des anneaux et des corps. En tant que femme elle a du mal à obtenir un poste de professeur, il lui faudra l'aide de David Hilbert et Félix Klein pour y parvenir. En 1933, comme d'autres savants juifs, elle est expulsée de son université et s'exile aux États-Unis. Les *anneaux noethériens* sont nommés en son honneur.

Srinivasa Ramanujan *(1887–1920).* Né en Inde, d'une santé fragile, passionné dès l'enfance par les mathématiques, il abandonne très vite ses études. À l'âge de 16 ans, il découvre un livre qui compile des milliers de formules sans preuve. N'ayant pas de contact avec d'autres mathématiciens, il suit ce modèle et va remplir des carnets contenant près de 4000 formules sans aucunes explications. Après avoir pris contact avec des mathématiciens britanniques en 1913, son travail est enfin reconnu. Ses formules concernent l'arithmétique, certaines étaient fausses, certaines déjà connues, mais la plupart étaient inédites. Par exemple que $e^{\pi\sqrt{163}}$ est très proche d'un entier (à 10^{-12} près), ou bien $\pi \simeq \frac{9801\sqrt{2}}{4412}$ (6 décimales exactes de π) ce qui correspond au premier terme de la formule exacte : $\frac{1}{\pi} = \frac{2\sqrt{2}}{9801} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}$.

Katherine Johnson *(1918–2020).* Mathématicienne américaine, elle travaille à la NASA dans une équipe de « calculatrices humaines » qui analyse et calcule les vols d'avions et les trajectoires des missions spatiales. En effet, avant l'avènement des calculatrices et des ordinateurs, des équipes, souvent composées de femmes, étaient chargées de faire les calculs à la main. Pour le premier vol en orbite autour de la Terre en 1962, les trajectoires sont calculées pour la première fois à l'aide d'un ordinateur, mais l'astronaute John Glenn demande que les calculs soient vérifiés avant le vol personnellement par Johnson. Les difficultés liées à son statut de femme noire dans une Amérique ségrégationniste sont racontées dans le film *Les figures de l'ombre*. L'unité *kilogirl*, inventée à l'époque, signifiait l'équivalent de 1000 heures de calculs à la main.

1.7. De nos jours

Andrew Wiles *(né en 1953).* Mathématicien britannique devenu célèbre par sa preuve du grand théorème de Fermat : « L'équation $x^n + y^n = z^n$ n'admet pas de solutions x, y, z entières si $n \geqslant 3$ » (pour $n = 2$ de telles solutions existent, par exemple $2^2 + 3^2 = 5^2$). Cet énoncé apparaissait dans les travaux de Fermat vers 1637 mais aucune démonstration n'était connue. Durant des années, des centaines de mathématiciens professionnels ou amateurs proposent des preuves, qui se révèlent toutes fausses ! Wiles travaille en secret plusieurs années avant de présenter sa preuve de plus de cent pages en 1994. Sa persévérance se retrouve dans une de ses citations : « Ce n'est pas parce que nous ne trouvons pas de solution qu'il n'y en a pas. »

Grigori Pereleman *(né en 1966).* Brillant étudiant à Leningrad (aujourd'hui Saint Petersbourg, Russie), ses recherches portent sur la topologie et la géométrie. En 2003 il prouve la conjecture de Poincaré que l'on peut formuler ainsi : « Tout ensemble de dimension 3 qui ressemble à une sphère est en fait une sphère », problème majeur resté insoluble depuis près de cent ans. Considéré comme l'un des plus grands mathématiciens actuels, il se retire cependant de la vie mathématique : il n'a jamais publié officiellement ses travaux, il a refusé un million de dollars pour avoir résolu l'un des *sept problèmes du millénaire* et n'est pas venu chercher sa médaille Fields attribuée en 2006 : « Tout le monde comprend que si la preuve est correcte, aucune autre reconnaissance n'est nécessaire. »

Terence Tao *(né en 1975).* Né en Australie d'une famille originaire de Hong-Kong, il fait ses études aux États-Unis. Génie très précoce, il discute dès l'âge de 10 avec des mathématiciens comme Paul Erdős. Mathématicien prolixe, il travaille tantôt seul, tantôt avec de nombreux collaborateurs sur des problèmes ardus (comme les équations de Navier-Stokes en mécanique des fluides) mais aussi sur des questions compréhensibles par tous. Il reçoit la médaille Fields en 2006. La conjecture de Goldbach affirme que « Tout entier pair > 3 est la somme de deux nombres premiers » (toujours non résolue). Tao a prouvé une forme plus faible « Tout entier impair est la somme de cinq nombres premiers (ou moins) ». Il a aussi démontré que la conjecture de Syracuse est « presque vraie » (en un certain sens probabiliste) : « Partant d'un entier $n > 0$, si n est pair on le divise par 2, sinon on le remplace par $3n+1$. Est-ce qu'en itérant ce processus on atteint toujours la valeur 1, quel que soit l'entier initial n ? ».

Maryam Mirzakhani *(1977–2017).* Mathématicienne iranienne. Ses contributions portent sur le comptage des géodésiques sur des surfaces. Une *géodésique* est une courbe la plus courte reliant deux points. Dans le plan ou l’espace, les géodésiques sont des morceaux de droites ; c’est différent pour d’autres surfaces, par exemple le chemin le plus court entre deux points d’une sphère est un arc d’un « grand cercle », les géodésiques sur un tore (une surface comme une chambre à air ou un *doughnut*) sont plus difficiles à déterminer. C’est la première femme à avoir reçu la médaille Fields (2014). Elle a dit : « Il faut dépenser de l’énergie et faire des efforts pour voir la beauté des mathématiques. »

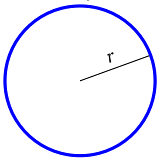
Première partie

Formules du lycée

2. Longueurs, aires, volumes

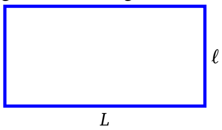
Périmètre (longueur) d'un cercle de rayon r

$$\boxed{L = 2\pi r}$$



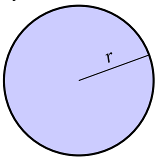
Aire d'un rectangle de longueur L et largeur ℓ

$$\boxed{A = L \times \ell}$$



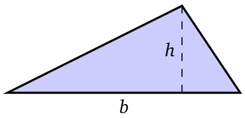
Aire d'un disque de rayon r

$$\boxed{A = \pi r^2}$$



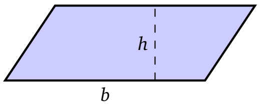
Aire d'un triangle de base b et de hauteur h

$$\boxed{A = \frac{b \times h}{2}}$$



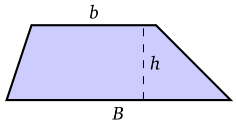
Aire d'un parallélogramme de base b et de hauteur h

$$\boxed{A = b \times h}$$



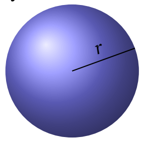
Aire d'un trapèze de bases B et b, et de hauteur h

$$\boxed{A = \frac{(B+b)\times h}{2}}$$



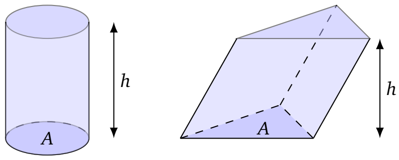
Aire d'une sphère de rayon r

$$\boxed{A = 4\pi r^2}$$



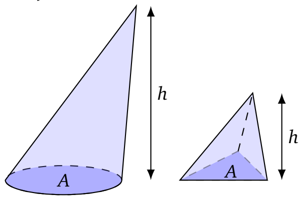
Volume d'un cylindre (ou d'un prisme) de base d'aire A et de hauteur h

$$\boxed{V = A \times h}$$



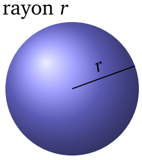
Volume d'un cône (ou d'une pyramide) de base d'aire A et de hauteur h

$$\boxed{V = \frac{1}{3} A \times h}$$



Volume d'une boule de rayon r

$$\boxed{A = \frac{4}{3}\pi r^3}$$

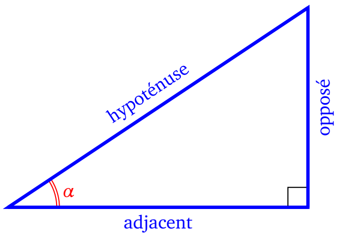


3. Trigonométrie au collège

$$\sin \alpha = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{longueur du côté adjacent}}{\text{longueur de l'hypoténuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{\text{longueur du côté opposé}}{\text{longueur du côté adjacent}}$$



Règle « SOH CAH TOA » :

$$\sin = \frac{o}{h} \qquad \cos = \frac{a}{h} \qquad \tan = \frac{o}{a}$$

« SOH CAH TOA » est un moyen mnémotechnique de se souvenir des formules à l'aide des initiales « SOH » : le Sinus, c'est le côté Opposé sur l'Hypoténuse. « CAH » : le Cosinus, c'est le côté Adjacent sur l'Hypoténuse. « TOA » : la Tangente, c'est le côté Opposé sur le côté Adjacent.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

4. Calculs algébriques

4.1. Identités remarquables

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

4.2. Fractions

Une ***fraction*** est $\frac{a}{b}$ avec a, b des nombres réels. a est le ***numérateur***, b est le ***dénominateur***. Ce dénominateur ne doit pas être nul : $b \neq 0$.

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$$

$$\frac{a}{1} = a \qquad \frac{0}{b} = 0 \qquad \frac{ka}{kb} = \frac{a}{b}$$

4.3. Puissances

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$x^n = \underbrace{x \times x \times \cdots \times x}_{n \text{ termes}}$$

$$\text{convention : } x^0 = 1 \qquad x^1 = x \qquad x^2 = x \times x \qquad \cdots$$

Pour $x \neq 0$, on pose $x^{-1} = \frac{1}{x}$. Et $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.
Pour $n, a, b \in \mathbb{Z}$:

$$x^a \times x^b = x^{a+b}$$

$$(xy)^n = x^n y^n$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$$

$$\frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}$$

$$(x^a)^b = x^{ab}$$

x^{a^b} signifie $x^{(a^b)}$

Puissances de 10

10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^9
1	10	100	1000	10 000	100 000	un million	un milliard
			kilo			mega	giga

10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}	10^{-4}	10^{-6}	10^{-9}
1	0,1	0,01	0,001	0,0001	un millionième	un milliardième
			milli		micro	nano

Pour les puissances positives l'exposant n est le nombre de zéros du nombre : par exemple $10\,000 = 10^4$ car 10 000 a 4 zéros.
Pour les puissances négatives l'exposant est n est aussi le nombre de zéros du nombre, en comptant le zéro avant la virgule : par exemple $0,001 = 10^{-3}$ car 0,001 a un total de 3 zéros (1 avant la virgule et 2 après).

Puissances de 2

2^0	2^1	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8	2^9	2^{10}
1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024

Carrés

2^2	3^2	4^2	5^2	6^2	7^2	8^2	9^2	10^2	11^2	12^2	13^2	14^2	15^2
4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225

4.4. Racine carrée

La ***racine carrée*** d'un réel $x \geqslant 0$ est le réel $\sqrt{x} \geqslant 0$ tel que $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.
Pour $x, y \geqslant 0$.

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y} \qquad x, y \geqslant 0$$

$$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad x \geqslant 0, y > 0$$

Pour $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{x}$$

Par exemple : $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
Pour $x \geqslant 0$,

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

(Attention pour $x < 0$, $\sqrt{x^2} = -x$!)
Pour $x \geqslant 0$, $n \in \mathbb{Z}$:

$$\left(\sqrt{x}\right)^n = \sqrt{x^n}$$

Pour $x, y \geqslant 0$:

$$y = \sqrt{x} \iff y^2 = x$$

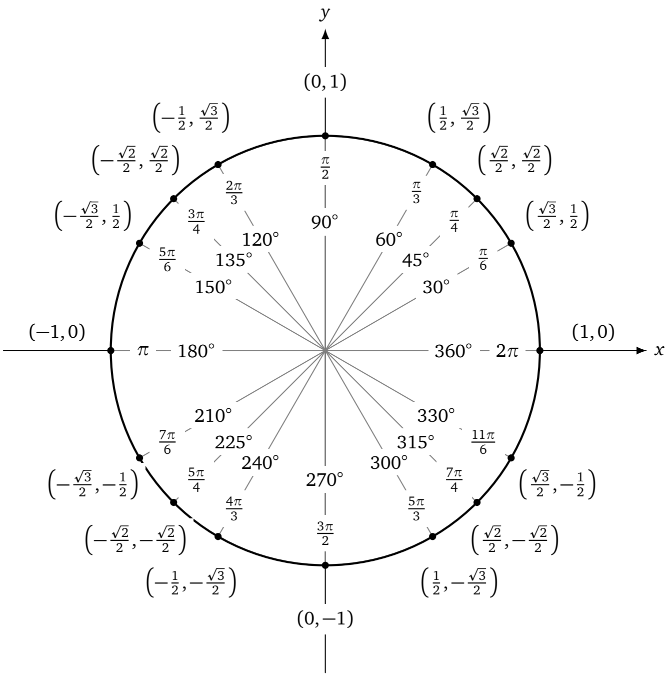
Attention ! $\sqrt{a+b}$ n'est pas égal à $\sqrt{a} + \sqrt{b}$.

4.5. Inégalités

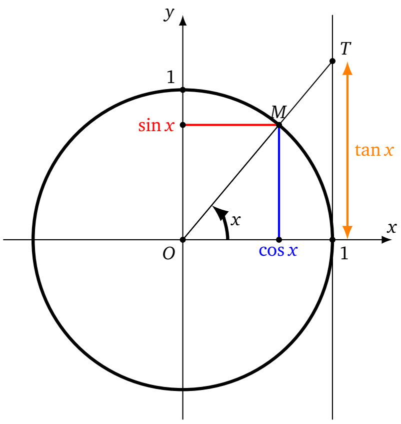
Définitions. $a \leqslant b \iff b - a \in [0, +\infty[$. $a < b \iff b - a \in]0, +\infty[$.
Addition. Si $a \leqslant b$ et $k \in \mathbb{R}$ alors $a + k \leqslant b + k$.
Multiplication par un réel positif. Si $a \leqslant b$ et $k \geqslant 0$ alors $ka \leqslant kb$.
Multiplication par un réel négatif. Attention ! Si $a \leqslant b$ et $k < 0$ alors $ka \geqslant kb$. En particulier si $a \leqslant b$ alors $-a \geqslant -b$. Par exemple $2 \leqslant 3$ et $-2 \geqslant -3$.
Inverse. Attention ! Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et alors $\frac{1}{a} \geqslant \frac{1}{b}$. Par exemple $2 \leqslant 3$ et $\frac{1}{2} \geqslant \frac{1}{3}$.
Autre formule d'addition. Si $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ alors $a + c \leqslant b + d$.
Autre formule de multiplication. Si $0 \leqslant a \leqslant b$ et $0 \leqslant c \leqslant d$ alors $ac \leqslant bd$.

5. Trigonométrie au lycée

5.1. Le cercle trigonométrique

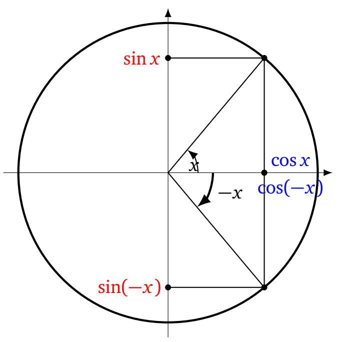


Voici le cercle trigonométrique (de rayon 1), le sens de lecture est l'inverse du sens des aiguilles d'une montre. Les angles remarquables sont marqués de 0 à 2π (en radian) et de 0° à 360°. Les coordonnées des points correspondant à ces angles sont aussi indiquées.



Le point M a pour coordonnées $(\cos x, \sin x)$. La droite (OM) coupe la droite d'équation $(x = 1)$ en T, l'ordonnée du point T est $\tan x$.
Les formules de base :

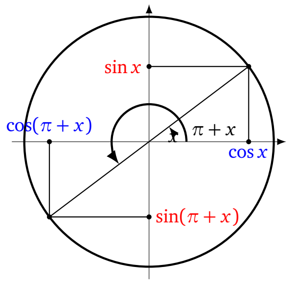
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$
$$\cos(x + 2\pi) = \cos x$$
$$\sin(x + 2\pi) = \sin x$$



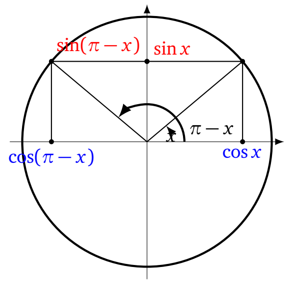
Nous avons les formules suivantes :

$$\cos(-x) = \cos x$$
$$\sin(-x) = -\sin x$$

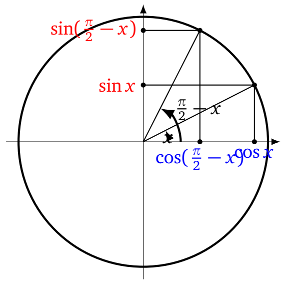
On retrouve graphiquement ces formules à l'aide du dessin des angles x et $-x$.
Il en est de même pour les formules suivantes :



$$\cos(\pi + x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi + x) = -\sin x$$



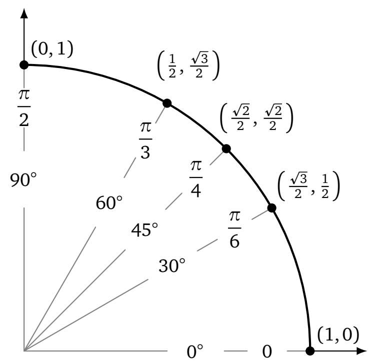
$$\cos(\pi - x) = -\cos x$$
$$\sin(\pi - x) = \sin x$$



$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$

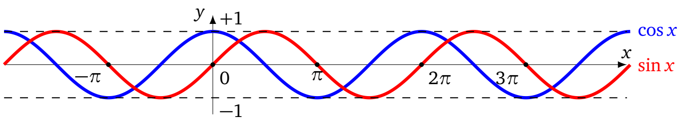
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	

Valeurs que l'on retrouve bien sur le cercle trigonométrique.

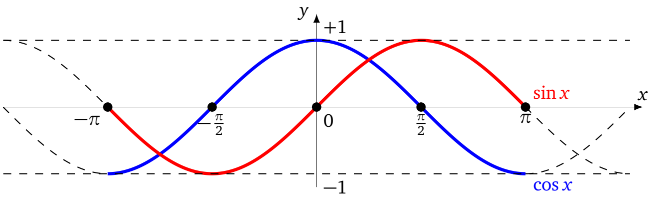


5.2. Les fonctions sinus, cosinus, tangente

La fonction cosinus est périodique de période 2π et elle est paire (donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées). La fonction sinus est aussi périodique de période de 2π mais elle est impaire (donc symétrique par rapport à l'origine).



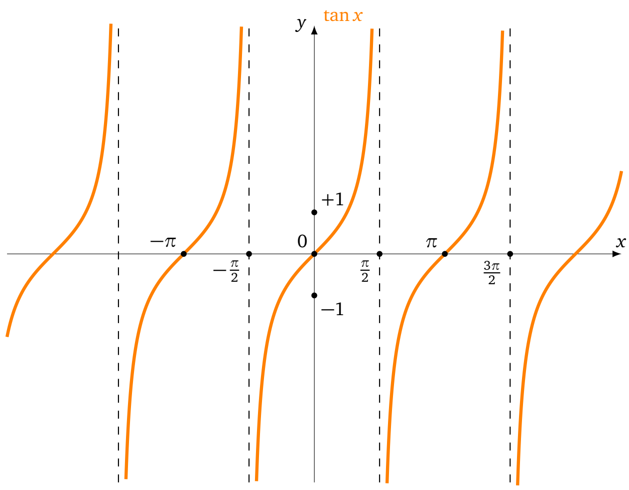
Voici un zoom sur l'intervalle $[-\pi, \pi]$.



Pour tout x n'appartenant pas à $\{\ldots, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \ldots\}$ la tangente est définie par

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

La fonction $x \mapsto \tan x$ est périodique de période π ; c'est une fonction impaire.



Voici les dérivées :

$$\begin{aligned}
\cos' x &= -\sin x \\
\sin' x &= \cos x \\
\tan' x &= 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}
\end{aligned}$$

5.3. Les formules d'addition

$$\begin{aligned}
\cos(a+b) &= \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b \\
\sin(a+b) &= \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a \\
\tan(a+b) &= \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}
\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement :

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b \\
\sin(a-b) &= \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a \\
\tan(a-b) &= \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}
\end{aligned}$$

Il est bon de connaître par cœur les formules suivantes (faire $a = b$ dans les formules d'addition) :

$$\begin{aligned}
\cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 a \\
&= \cos^2 a - \sin^2 a \\
\sin 2a &= 2\sin a \cdot \cos a \\
\tan 2a &= \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}
\end{aligned}$$

6. Dérivées

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

— **Somme.** $\boxed{(u+v)' = u' + v'}$

— **Produit par un réel.** $\boxed{(ku)' = ku' \qquad \text{où } k \in \mathbb{R}}$

— **Produit.** $\boxed{(u \times v)' = u'v + uv'}$

— **Inverse.** $\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}}$

— **Quotient.** $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Pour u une fonction qui dépend de x :

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \qquad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u'u^{\alpha-1} \qquad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

7. Suites

7.1. Suites arithmétiques

Soit u_0 un ***terme initial*** et a une ***raison***, la ***suite arithmétique*** (u_n) est définie par :

$$u_n = an + u_0$$

La formule de récurrence est :

$$u_{n+1} = u_n + a$$

Ainsi la raison se calcule par $a = u_{n+1} - u_n$ pour n'importe quel $n \geqslant 0$. Par exemple $a = u_1 - u_0$.
Somme des n premiers entiers :

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

7.2. Suites géométriques

Soit u_0 un ***terme initial*** et q une ***raison***, la ***suite géométrique*** (u_n) est définie par :

$$u_n = u_0 \cdot q^n$$

La formule de récurrence est :

$$u_{n+1} = q \cdot u_n$$

Ainsi la raison se calcule par $q = \frac{u_{n+1}}{u_n}$ pour n'importe quel $n \geqslant 0$ (avec $u_n \neq 0$). Par exemple $q = \frac{u_1}{u_0}$.
Somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q :

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

8. Fonctions

8.1. Fonction polynomiale

Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Soit $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$ le *discriminant*.

Racines

— Si $\Delta > 0$, l'équation $P(x) = 0$ a deux solutions réelles :

$$\boxed{x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}}$$

— Si $\Delta = 0$, l'équation $P(x) = 0$ a une solution double :

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

— Si $\Delta < 0$, l'équation $P(x) = 0$ n'a pas de solution réelle.

Factorisation

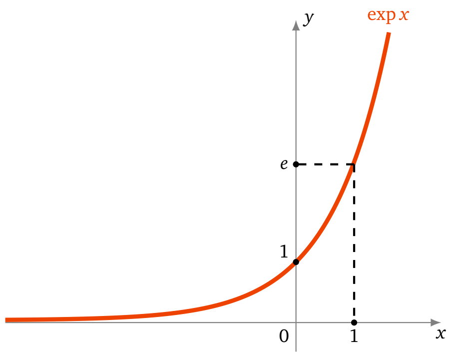
— Si $\Delta > 0$, $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
— Si $\Delta = 0$, $P(x) = a(x - x_0)^2$.

Signe

— Si $\Delta > 0$, $P(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines (c'est-à-dire sur $]-\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty[$).
— Si $\Delta = 0$ ou $\Delta < 0$, $P(x)$ est du signe de a sur $\mathbb{R}$.

8.2. Exponentielle

La fonction *exponentielle* : $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.

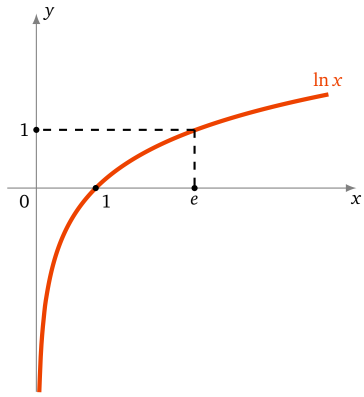


La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

— $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
— $\exp(nx) = (\exp x)^n$
— $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante,
— $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$,
— $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$,
— $\exp(1) = e \simeq 2,718\ldots$

8.3. Logarithme

Le *logarithme népérien* $\ln :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$.



— $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (pour tout $a, b > 0$),
— $\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,
— $\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$),
— $\ln$ est une fonction continue, strictement croissante,
— $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,
— $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$,
— $\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$,
— $\lim_{x\to0^+} \ln x = -\infty$.

Lien logarithme/exponentielle :

$$\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$$

$$\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\boxed{y = \exp(x) \iff x = \ln(y)}$$

9. Droites et vecteurs

9.1. Géométrie

La ***distance*** entre $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ est $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.
Le ***milieu*** M de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+y_A}{2}, \frac{x_B+y_B}{2}\right)$.

9.2. Vecteurs

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points du plan, le ***vecteur*** de A à B est $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A)$.
La ***norme*** d'un vecteur $\vec{v} = (x, y)$ est $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Soient $\vec{u} = (x, y)$ et $\vec{v} = (x', y')$ deux vecteurs et $k \in \mathbb{R}$.
Addition. $\vec{u} + \vec{v} = (x + x', y + y')$.
Multiplication par un scalaire. $k\vec{u} = (kx, ky)$.
Opposé. $-\vec{u} = (-x, -y)$.
Produit scalaire. $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$.
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos\theta$ où θ est l'angle entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$$\|\vec{v}\|^2 = \vec{v} \cdot \vec{v}$$

Vecteurs orthogonaux. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***orthogonaux*** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
Si $\vec{u} = (a, b)$ alors $\vec{n} = (-b, a)$ est un vecteur orthogonal à $\vec{v}$.
Vecteurs colinéaires. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont ***colinéaires*** (ou ***parallèles***) si il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ (ou $\vec{v} = k\vec{u}$). $\vec{u} = (a, b)$ et $\vec{v} = (c, d)$ sont colinéaires si et seulement si $ad - bc = 0$.
On note $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le ***déterminant***.

9.3. Droites

Équation cartésienne.

$$ax + by + c = 0$$

avec a, b et c des nombres réels (et a et b non tous les deux nuls).
Vecteur directeur. $\vec{v} = (-b, a)$ est un vecteur directeur de la droite d'équation $ax + by + c = 0$
Vecteur normal. $\vec{n} = (a, b)$ est un vecteur normal à la droite d'équation $ax + by + c = 0$.
Équation réduite.

$$y = ax + b$$

avec a et b des nombres réels (et a non nul).
- a est la ***pente*** ou ***coefficient directeur***,
- b est l'***ordonnée à l'origine***.

Si $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ sont deux points de la droite, alors $a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. On trouve ensuite l'ordonnée à l'origine à l'aide de la relation $y_A = ax_A + b$.
Équation paramétrique.

$$\begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \end{cases}$$

avec $A(x_A, y_A)$ un point de la droite et $\vec{v} = (\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de la droite.
Droites parallèles. Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires. Ainsi $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c' = 0$ sont deux droites parallèles si et seulement si $\det(\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix}) = 0$ c'est-à-dire

$$ab' - a'b = 0$$

Droites perpendiculaires. Deux droites sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux. Ainsi $ax + by + c = 0$ et $ax' + by' + c' = 0$ sont deux droites perpendiculaires si et seulement si

$$aa' + bb' = 0.$$

Deuxième partie

Formules de L1 – Analyse

10. Les nombres réels

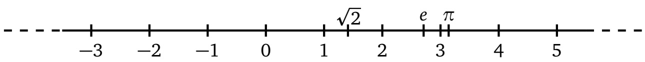
10.1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

L'ensemble des *nombres rationnels* est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Proposition. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Proposition. *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel :* $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

La démonstration classique par l'absurde est à connaître !
On représente les nombres réels sur la « droite numérique » :



$\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots \quad \pi \simeq 3,14159265\ldots \quad e \simeq 2,718\ldots$
La droite numérique « achevée » est : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

10.2. Propriétés de $\mathbb{R}$

Proposition (addition et multiplication)**.** *$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un* **corps commutatif***. C'est-à-dire, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a & a\times b = b\times a \\ 0+a=a & 1\times a = a \text{ si } a\neq 0 \\ a+b=0 \iff a=-b & ab=1 \iff a=\frac{1}{b} \\ (a+b)+c=a+(b+c) & (a\times b)\times c = a\times(b\times c) \end{array}$$

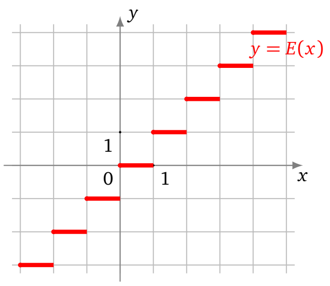
$$a\times(b+c) = a\times b + a\times c$$
$$a\times b = 0 \iff (a=0 \text{ ou } b=0)$$

Proposition (Ordre)**.** *La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale. Nous avons donc :*
— *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$ (***réflexive***),*
— *pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$ (***antisymétrique***),*
— *pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$ (***transitive***),*
— *pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (***totale***).*

Proposition (Propriété d'Archimède)**.** *$\mathbb{R}$ est* **archimédien***, c'est-à-dire : Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.*

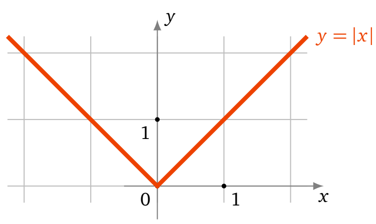
Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il* **existe** *un* **unique** *entier relatif, la* **partie entière** *notée $E(x)$, tel que :*

$$\boxed{E(x) \leqslant x < E(x)+1}$$



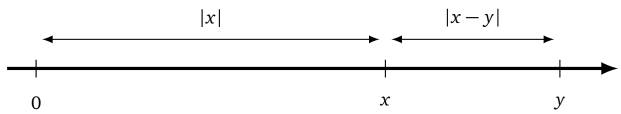
Pour un nombre réel x, on définit la *valeur absolue* de x par :

$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$



Proposition.
1. $|x| \geqslant 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. **Inégalité triangulaire** $\boxed{|x+y| \leqslant |x| + |y|}$
5. **Seconde inégalité triangulaire** $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x-y|$

Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.



De plus $|x-a| < r \iff x \in]a-r, a+r[$.

10.3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un *voisinage* de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

Théorème.
1. *$\mathbb{Q}$ est* **dense** *dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*
2. *$\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.*

10.4. Borne supérieure

Maximum, minimum

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un *plus grand élément* (ou *maximum*) de A si :

$$\alpha \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A \ x \leqslant \alpha.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.
Le *plus petit élément* de A, (ou *minimum*) noté $\min A$, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A \ x \geqslant \alpha$.

Le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un *majorant* de A si $\forall x \in A \ x \leqslant M$.
Un réel m est un *minorant* de A si $\forall x \in A \ x \geqslant m$.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est *majorée* (resp. *minorée*).

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.
— α est la *borne supérieure* de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
— α est la *borne inférieure* de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Théorème ($\mathbb{R}4$)**.** *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que*

(i) *si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$,*

(ii) *pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.*

Caractérisation très utile de la borne supérieure.

Proposition. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que*

(i) *$\sup A$ est un majorant de A,*

(ii) *il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.*

11. Les suites

11.1. Premières définitions

Une ***suite*** est une application $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n-ème ***terme*** ou ***terme général*** de la suite.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***majorée*** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***minorée*** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geqslant m$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***bornée*** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leqslant M$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***croissante*** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement croissante*** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leqslant u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***strictement décroissante*** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***monotone*** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
- Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $u_n > 0$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$.

Définition.
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour ***limite*** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geqslant N$ alors $|u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$:
$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon)}$$
- La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***tend vers $+\infty$*** si :
$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad (n \geqslant N \implies u_n \geqslant A)$$
- Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est ***convergente*** si elle admet une limite ***finie***. Elle est ***divergente*** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition. *Si une suite est convergente, sa limite est unique.*

Proposition. $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n\to+\infty}(u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n\to+\infty}|u_n - \ell| = 0$,

Proposition (Opérations sur les limites)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes.*

1. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n\to+\infty} \lambda u_n = \lambda\ell$.*
2. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors*
$$\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = \ell + \ell' \qquad \lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$
3. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R}\setminus\{0\}$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.*

Proposition (Opérations sur les limites infinies)**.** *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{v_n} = 0$
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n + v_n) = +\infty$.*
3. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $\lambda > 0$ alors $\lim_{n\to+\infty}(u_n \times v_n) = +\infty$.*
4. *Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.*

Proposition.

1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$. Alors*
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \leqslant \lim_{n\to+\infty} v_n$$
2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \geqslant u_n$. Alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.*
3. *Théorème des « gendarmes » : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont trois suites telles que*
$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leqslant v_n \leqslant w_n$$
et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell = \lim_{n\to+\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

11.2. Exemples remarquables

Suite géométrique

Proposition (Suite géométrique)**.** *On fixe un réel a. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = a^n$.*

1. *Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 1$.*
2. *Si $a > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.*
3. *Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*
4. *Si $a \leqslant -1$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.*

Série géométrique

Proposition (Série géométrique)**.** *Soit a un réel, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n$, on a :*
$$\boxed{\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}}$$

Si $a \in]-1,1[$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^n a^k$, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$. Ces formules sont aussi valables si $a \in \mathbb{C}\setminus\{1\}$. Si $a = 1$, alors $1 + a + a^2 + \cdots + a^n = n + 1$.

Théorème. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait : $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \ell < 1$. Alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.*

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.*
$$\boxed{\text{Si } \lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \text{ alors } \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.}$$

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

11.3. Théorèmes de convergence

Proposition. *Toute suite convergente est bornée.*

Théorème.

$$\boxed{\text{Toute suite croissante et majorée est convergente.}}$$

Remarque. Et aussi :
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Définition. Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont dites ***adjacentes*** si

1. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geqslant 0$, on a $u_n \leqslant v_n$,
3. $\lim_{n\to+\infty}(v_n - u_n) = 0$.

Théorème.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Si les suites } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ sont adjacentes,} \\ \text{elles convergent vers la même limite.}\end{array}}$$

Les termes de la suite sont ordonnés ainsi :
$$u_0 \leqslant u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots \leqslant u_n \leqslant \cdots\cdots \leqslant v_n \leqslant \cdots \leqslant v_2 \leqslant v_1 \leqslant v_0$$

Définition. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Une ***suite extraite*** ou ***sous-suite*** de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ on a $\lim_{n\to+\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.*

Corollaire. *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.*

Exemple. La suite de terme $u_n = (-1)^n$ diverge.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.*

11.4. Suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Une ***suite récurrente*** est :
$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Proposition. *Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ, alors ℓ est une solution de l'équation :*
$$\boxed{f(\ell) = \ell}$$

Proposition (Cas d'une fonction croissante)**.** *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et* **croissante***, alors quel que soit $u_0 \in [a,b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a,b]$ vérifiant $\boxed{f(\ell) = \ell}$.*

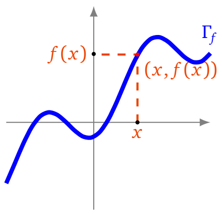
Pour appliquer cette proposition, il faut vérifier que $f([a,b]) \subset [a,b]$.

Proposition (Cas d'une fonction décroissante)**.** *Soit $f : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue et* **décroissante***. Soit $u_0 \in [a,b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :*
- *La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.*
- *La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.*

12. Limites et fonctions continues

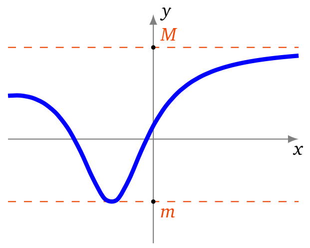
12.1. Notions de fonction

Une *fonction* est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$ appelé *domaine de définition*.
Le *graphe* d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$.



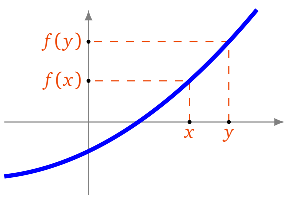
- f est *majorée* sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \leqslant M$;
- f est *minorée* sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \ \ \forall x \in U \ f(x) \geqslant m$;
- f est *bornée* sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \ \forall x \in U \ \ |f(x)| \leqslant M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



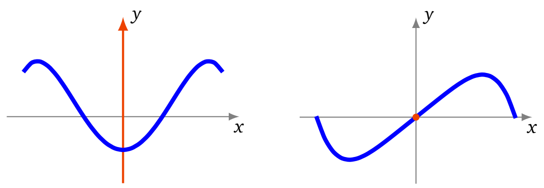
- f est *croissante* sur U si $\boxed{\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)}$
- f est *strictement croissante* si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est *décroissante* si $\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$
- f est *strictement décroissante* si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est *monotone* sur U si f est croissante ou décroissante sur U.

Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :

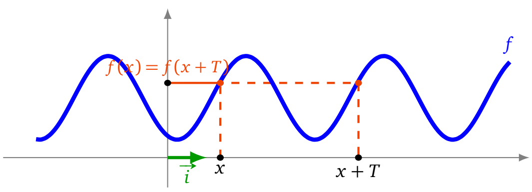


Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

- f est *paire* si $\forall x \in I \ \ f(-x) = f(x)$,
- f est *impaire* si $\forall x \in I \ \ f(-x) = -f(x)$.
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).



Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ ($n \in \mathbb{N}$) est paire. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$) est impaire.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est *périodique* de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \ \ f(x + T) = f(x)$.



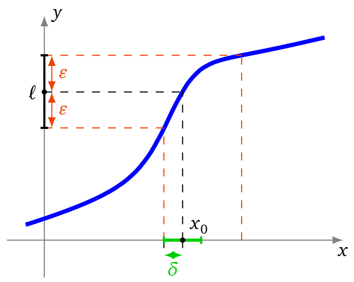
Exemples. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.

12.2. Limites

Limite en un point
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que *f a pour limite ℓ en x_0* si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$



- L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
- L'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \varepsilon$ avec le $\exists \delta$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition. On dit que *f a pour limite $+\infty$ en x_0* si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

Limite en l'infini
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que *f a pour limite ℓ en $+\infty$* si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

- On dit que *f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$* si

$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

Proposition.

$$\boxed{\text{Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.}}$$

Soient deux fonctions f et g et $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

Proposition. *Si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors :*

- $\lim_{x_0}(\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x_0}(f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0}(f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ (ou $-\infty$) alors $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

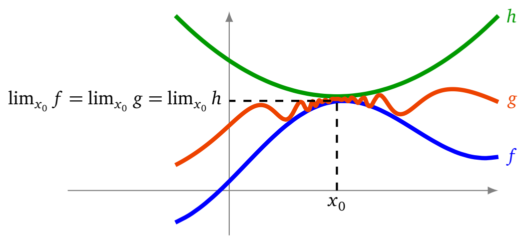
Proposition. *Si $\lim_{x_0} f = \ell$ et $\lim_{\ell} g = \ell'$, alors $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.*

Formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0.

Proposition.

- *Si $f \leqslant g$ et si $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ et $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, alors $\ell \leqslant \ell'$.*
- *Si $f \leqslant g$ et si $\lim_{x_0} f = +\infty$, alors $\lim_{x_0} g = +\infty$.*
- *Théorème des gendarmes*

$$\boxed{\text{Si } f \leqslant g \leqslant h \text{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \text{ alors } g \text{ a une limite en } x_0 \text{ et } \lim_{x_0} g = \ell.}$$



12.3. Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

— f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

— f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.

Proposition. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues en un point $x_0 \in I$. Alors*
— *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*
— *$f + g$ est continue en x_0,*
— *$f \times g$ est continue en x_0,*
— *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

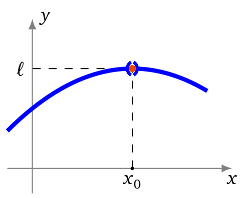
Proposition. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Prolongement par continuité

Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.
— On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.
— On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le ***prolongement par continuité*** de f en x_0.



Suites et continuité

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :*

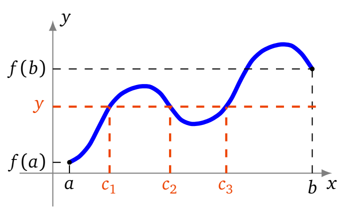
$$f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{c} \text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0) \end{array}$$

En particulier : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilise pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

12.4. Continuité sur un intervalle

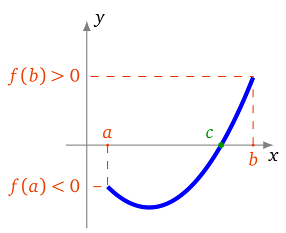
Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = y$.



Corollaire. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

Si $f(a) \cdot f(b) < 0$, alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(c) = 0$.



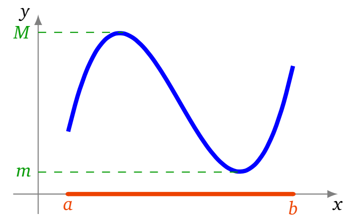
Exemple. Tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a, b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

Théorème (Fonctions continues sur un segment)**.** *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a, b]) = [m, M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*

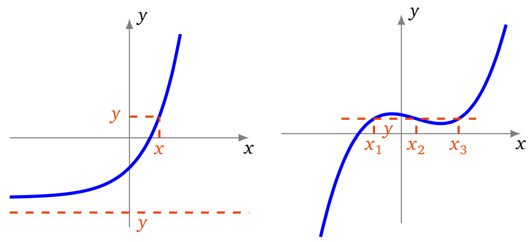


Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est bornée sur $[a, b]$, et elle atteint ses bornes.

12.5. Fonctions monotones et bijections

Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.
— f est ***injective*** si $\forall x, x' \in E \;\; f(x) = f(x') \implies x = x'$;
— f est ***surjective*** si $\forall y \in F \;\; \exists x \in E \;\; y = f(x)$;
— f est ***bijective*** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \;\; \exists! x \in E \;\; y = f(x)$.

Graphe d'une fonction injective (à gauche), surjective (à droite).

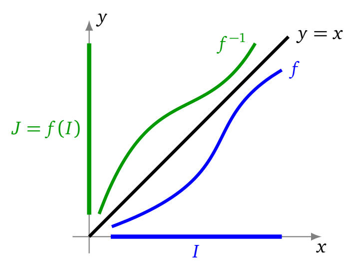


Proposition. *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. La fonction g est la* **bijection réciproque** *de f et se note f^{-1}.*

— On rappelle que l'***identité***, $\mathrm{id}_E : E \to E$ est définie par $x \mapsto x$.
— $g \circ f = \mathrm{id}_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$.
— Alors que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y$.
— Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $(y = x)$.

Théorème (Théorème de la bijection)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*



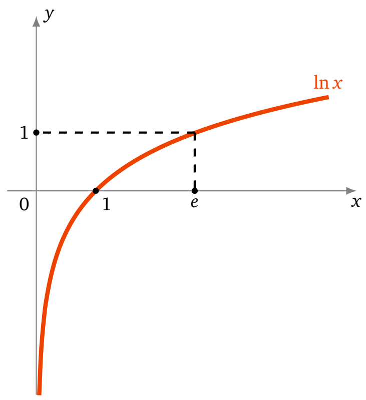
13. Fonctions usuelles

13.1. Logarithme et exponentielle

Logarithme Le ***logarithme néperien*** $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$.

Proposition.

1. *$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (pour tout $a, b > 0$),*
2. *$\ln(\frac{1}{a}) = -\ln a$,*
3. *$\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$)*
4. *$\ln$ est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0,+\infty[$ sur $\mathbb{R}$,*
5. *$\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,*
6. *$\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$,*
7. *$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,*
8. *$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,*
9. *la fonction $\ln$ est concave et $\ln x \leqslant x - 1$ (pour tout $x > 0$).*



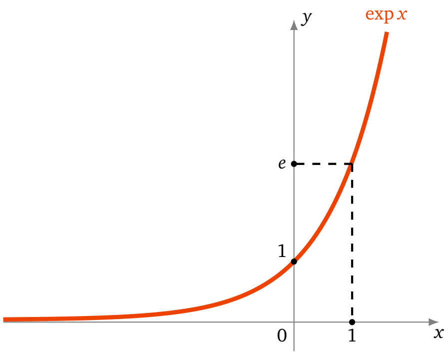
— Le ***logarithme en base a*** $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De sorte que $\log_a(a) = 1$.

— Pour $a = 10$ on obtient le ***logarithme décimal*** $\log_{10}$ qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$).

$$\boxed{x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)}$$

— En informatique intervient le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.

Exponentielle
La fonction ***exponentielle***, notée $\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est la bijection réciproque de $\ln :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.



Proposition. *La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :*

1. *$\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$*
2. *$\exp(nx) = (\exp x)^n$*
3. *$\exp : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x\to+\infty} \exp = +\infty$.*
4. *$\exp(1) = e \simeq 2,718\ldots$*
5. *$\lim_{x\to+\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,*
6. *La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp x \geqslant 1 + x$.*

Lien logarithme/exponentielle :
$\boxed{\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0}$ et $\boxed{\ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}}$
Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$\boxed{y = \exp(x) \iff x = \ln(y)}$$

Puissance
Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$\boxed{a^b = \exp\big(b \ln a\big)}$$

Remarque.

— $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\big(\frac{1}{2}\ln a\big)$

— $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\big(\frac{1}{n}\ln a\big)$ (la ***racine n-ième*** de a)

— Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

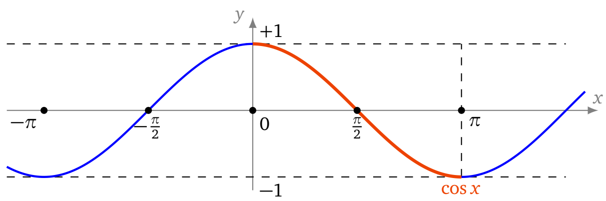
$$x^{a+b} = x^a x^b \qquad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \qquad (xy)^a = x^a y^a \qquad (x^a)^b = x^{ab}$$

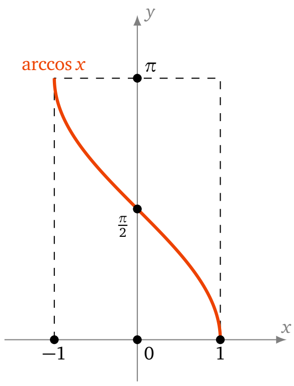
$$\ln(x^a) = a \ln x$$

13.2. Fonctions circulaires inverses

Arccosinus
La restriction $\cos_| : [0,\pi] \to [-1,1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arccosinus*** :

$$\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$$





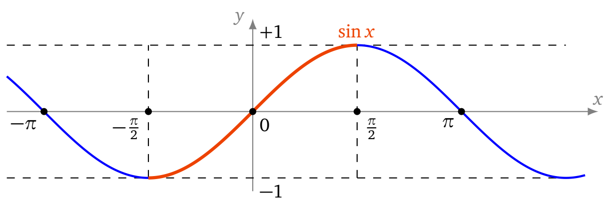
$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos\big(\arccos(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arccos\big(\cos(x)\big) = x & \forall x \in [0,\pi] \end{array}}$$

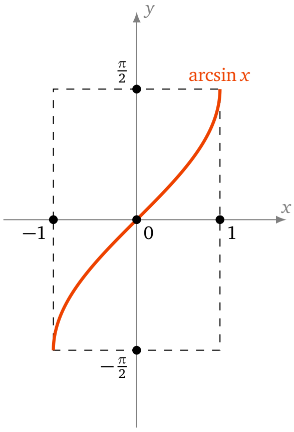
$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [0,\pi] \qquad \cos(x) = y \iff x = \arccos y}$$

$$\boxed{\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[}$$

Arcsinus
La restriction $\sin_| : [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] \to [-1,1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arcsinus*** :

$$\arcsin : [-1,1] \to [-\tfrac{\pi}{2}, +\tfrac{\pi}{2}]$$





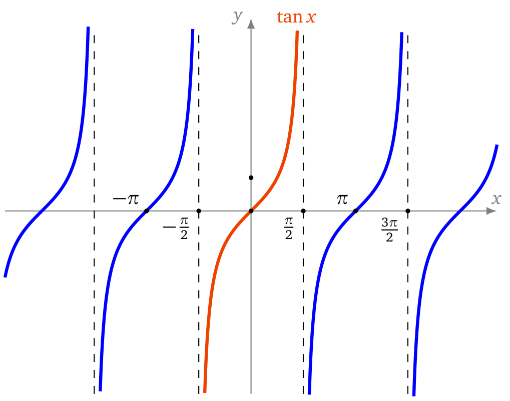
$$\boxed{\begin{array}{ll} \sin\big(\arcsin(x)\big) = x & \forall x \in [-1,1] \\ \arcsin\big(\sin(x)\big) = x & \forall x \in [-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}] \end{array}}$$

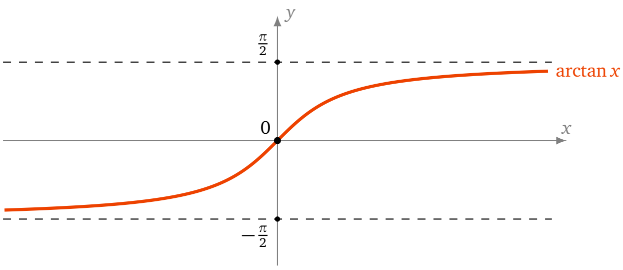
$$\boxed{\text{Si} \quad x \in [-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}] \qquad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y}$$

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \forall x \in]-1,1[}$$

Arctangente
La restriction $\tan_| :]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction ***arctangente*** :

$$\arctan : \mathbb{R} \to]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}[$$





$$\boxed{\begin{array}{ll} \tan\big(\arctan(x)\big) = x & \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan\big(\tan(x)\big) = x & \forall x \in]-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}[\end{array}}$$

$$\boxed{\text{Si} \quad x \in]-\tfrac{\pi}{2},+\tfrac{\pi}{2}[\qquad \tan(x) = y \iff x = \arctan y}$$

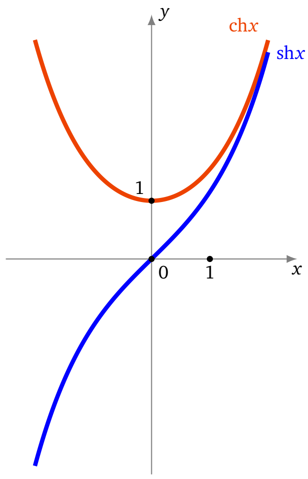
$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}}$$

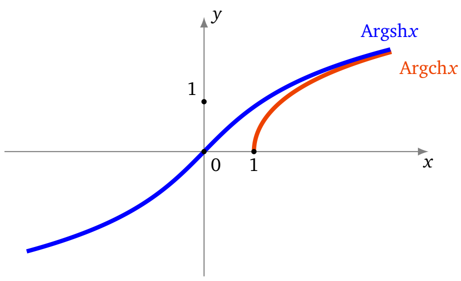
13.3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***cosinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$$

La restriction $\operatorname{ch}_| : [0,+\infty[\to [1,+\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argch} : [1,+\infty[\to [0,+\infty[$.





Pour $x \in \mathbb{R}$, le ***sinus hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$$

$\operatorname{sh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x\to-\infty} \operatorname{sh} x = -\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sh} x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Proposition.
— $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$
— $\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$, $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$
— $\operatorname{Argsh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *est strictement croissante et continue.*
— Argsh *est dérivable et* $\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
— $\operatorname{Argsh} x = \ln\big(x + \sqrt{x^2+1}\big)$

Par définition la ***tangente hyperbolique*** est :

$$\boxed{\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}}$$

La fonction $\operatorname{th} : \mathbb{R} \to]-1,1[$ est une bijection, on note $\operatorname{Argth} :]-1,1[\to \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.

14. Dérivée d'une fonction

14.1. Définition

Dérivée en un point
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. f est ***dérivable en*** x_0 si la limite suivante existe :

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

Proposition. *Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0.*

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.
Tangente Une équation de la ***tangente*** au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$\boxed{y = (x-x_0)f'(x_0) + f(x_0)}$$

14.2. Calculs des dérivées

$$\boxed{(u+v)' = u'+v' \qquad (\lambda u)' = \lambda u' \qquad (u\times v)' = u'v + uv'}$$

$$\boxed{\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \qquad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}}$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n\in\mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$
e^x	e^x
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

Fonction	Dérivée
u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n\in\mathbb{Z})$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\sqrt{u}$	$\frac{1}{2}\frac{u'}{\sqrt{u}}$
u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha\in\mathbb{R})$
e^u	$u'e^u$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos u$	$-u'\sin u$
$\sin u$	$u'\cos u$
$\tan u$	$u'(1+\tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Composition

$$\boxed{(g\circ f)'(x) = g'\big(f(x)\big)\cdot f'(x)}$$

Corollaire. *Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \to J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \to I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:*

$$\boxed{(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'\big(f^{-1}(x)\big)}}$$

Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité $f\big(g(x)\big) = x$ où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f.

Théorème (Formule de Leibniz)**.**

$$\big(f\cdot g\big)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}\cdot g^{(k)}.$$

Pour $n=1$ on retrouve $(f\cdot g)' = f'g + fg'$. Pour $n=2$, on a $(f\cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

14.3. Extremum local, théorème de Rolle

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I.

— On dit que x_0 est un ***point critique*** de f si $f'(x_0) = 0$.

— On dit que f admet un ***maximum local en*** x_0 (resp. un ***minimum local en*** x_0) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x\in I\cap J \quad f(x) \leqslant f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geqslant f(x_0)$).

— On dit que f admet un ***extremum local en*** x_0 si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Théorème. *Soit I un intervalle ouvert et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.*

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.
La réciproque du théorème est fausse. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Théorème (Théorème de Rolle)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ telle que*

— *f est continue sur $[a,b]$,*
— *f est dérivable sur $]a,b[$,*
— *$f(a) = f(b)$.*

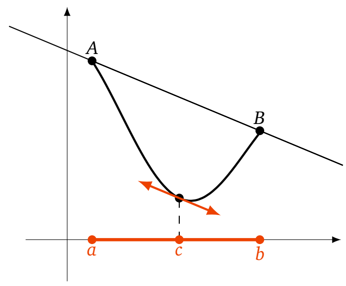
Alors il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

14.4. Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$. Il existe $c \in]a,b[$ tel que*

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(c)\,(b-a)}$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Corollaire. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.*

1. *$\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est croissante ;*
2. *$\forall x \in]a,b[\quad f'(x) \leqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est décroissante ;*
3. *$\forall x \in]a,b[\quad f'(x) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f$ est constante ;*
4. *$\forall x \in]a,b[\quad f'(x) > 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strictement croissante ;*
5. *$\forall x \in]a,b[\quad f'(x) < 0 \quad \Longrightarrow \quad f$ est strictement décroissante.*

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fausse. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire (Inégalité des accroissements finis)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $\left|f'(x)\right| \leqslant M$ alors*

$$\boxed{\forall x,y\in I \qquad \left|f(x)-f(y)\right| \leqslant M|x-y|}$$

Exemple : $\boxed{|\sin x| \leqslant |x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Preuve : Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leqslant 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors $|\sin x - \sin y| \leqslant |x-y|$. On conclut en fixant $y = 0$.

Corollaire (Règle de l'Hospital)**.** *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que*

— *$f(x_0) = g(x_0) = 0$,*
— *$\forall x \in I\setminus\{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.*

$$\boxed{\text{Si} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in\mathbb{R}) \quad \text{alors} \quad \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \ell.}$$

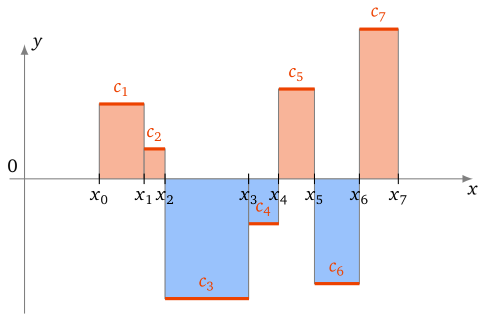
15. Intégrales

15.1. L'intégrale de Riemann

Fonction en escalier

Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une *fonction en escalier* s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, \dots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$.
Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.
L'intégrale d'une fonction en escalier est :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$



Chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire algébrique du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i.

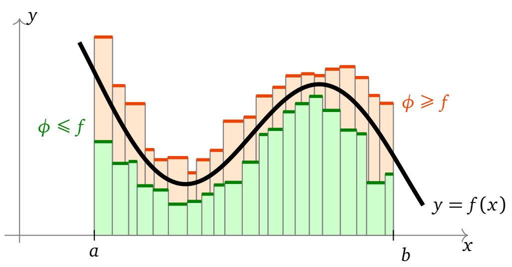
Fonction intégrable

Notation : $f \leqslant g$ signifie $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. On définit :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f \right\}$$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \geqslant f \right\}$$



On a $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.
Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite *intégrable* (*au sens de Riemann*) si $I^-(f) = I^+(f)$. On note alors ce nombre $\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.*

Et aussi :

— Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors f est intégrable.
— Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.

15.2. Propriétés

Les fonctions sont supposées intégrables.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \qquad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Relation de Chasles

Pour a, b, c quelconques :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Positivité de l'intégrale

Proposition.

L'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Variante :

$$\text{Si } f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Linéarité de l'intégrale

Pour tous réels λ, μ

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

15.3. Primitive

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. $F : I \to \mathbb{R}$ est une *primitive* de f si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée. Trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition. *Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, alors toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.*

Primitives des fonctions usuelles

$$\int e^x\,dx = e^x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \tfrac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \tfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\int \tfrac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad \text{sur }]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c, \ \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \tfrac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \tfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\int \tfrac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \tfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur }]1, +\infty[$$

Relation primitive-intégrale

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est une primitive de f, c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Notation. $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
Remarques :

1. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est même ***l'unique primitive de f qui s'annule en a***.
2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\boxed{\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)}$.

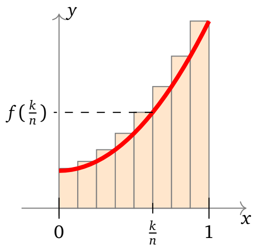
Sommes de Riemann

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors*

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_a^b f(x)\,dx}$$

Cas particulier $a=0$, $b=1$, $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ et $f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)=f\left(\frac{k}{n}\right)$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 f(x)\,dx$$



15.4. Intégration par parties - Changement de variable

Intégration par parties

Théorème. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.*

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \left[uv\right]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

Pour les primitives :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \left[uv\right] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Changement de variable

Théorème. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a,b \in J$*

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Si F est une primitive de f alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $\big(f\circ\varphi\big)\cdot\varphi'$.

Méthodologie.

- Trouver le bon changement de variable $u=\varphi(x)$.
- Effectuer le changement de l'élément différentiel $du=\varphi'(x)\,dx$.
- Effectuer le changement de bornes : comme x varie de ... à ... alors u varie de ... à ...
- Appliquer la formule de changement de variable.

Exemple. Calcul de $\int_0^{1/2} \frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

Soit le changement de variable $u=\varphi(x)=1-x^2$. Alors $du=\varphi'(x)\,dx=-2x\,dx$. Pour $x=0$ on a $u=\varphi(0)=1$ et pour $x=\frac{1}{2}$ on a $u=\varphi(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x)=-2x$, φ est une bijection de $[0,\frac{1}{2}]$ sur $[1,\frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} \frac{x\,dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4} \frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4} u^{-3/2}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\left[-2u^{-1/2}\right]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}-1 = \frac{2}{\sqrt{3}}-1.\end{aligned}$$

15.5. Intégration des fractions rationnelles

Trois situations de base

On souhaite intégrer $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$.

Premier cas. Le dénominateur ax^2+bx+c possède deux racines réelles distinctes $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

Écrire $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Alors

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-x_1|+B\ln|x-x_2|+c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,x_1[$, $]x_1,x_2[$, $]x_2,+\infty[$ (si $x_1<x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur ax^2+bx+c possède une racine double $x_0\in\mathbb{R}$.

Alors $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{(x-x_0)^2}+\frac{B}{x-x_0}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Alors

$$\int f(x)\,dx = -\frac{A}{x-x_0}+B\ln|x-x_0|+c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,x_0[$, $]x_0,+\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $u=ax^2+bx+c$ ne possède pas de racine réelle.

1. Faire apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).
2. Il reste une partie du type $\frac{1}{u}$ qui par un changement de variable se ramène à une expression $\frac{1}{v^2+1}$ dont une primitive est $\arctan v$.

Intégration des éléments simples

Une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x)\in\mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \text{ avec } b^2-4ac<0$$

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a) Si $k=1$ alors $\int \frac{\gamma\,dx}{x-x_0}=\gamma\ln|x-x_0|+c_0$.
   (b) Si $k\geqslant 2$ alors $\int \frac{\gamma\,dx}{(x-x_0)^k}=\gamma\int(x-x_0)^{-k}\,dx=\frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}+c_0$.
3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme
$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}=\gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}+\delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$
   (a) Si $k=1$, calcul de $\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\ln|u(x)|+c_0=\ln|ax^2+bx+c|+c_0$.
   (b) Si $k\geqslant 2$, calcul de $\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx=\frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1}+c_0=\frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1}+c_0$.
   (c) Si $k=1$, calcul de $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Par un changement de variable $u=px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int\frac{du}{u^2+1}=\arctan u+c_0$.
   (d) Si $k\geqslant 2$, calcul de $\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. On effectue le changement de variable $u=px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k=\int\frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.

Intégration des fonctions trigonométriques

Les règles de Bioche. On note $\omega(x)=f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x)=f(-x)\,d(-x)=-f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi-x)=f(\pi-x)\,d(\pi-x)=-f(\pi-x)\,dx$.

- Si $\omega(-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\cos x$.
- Si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\sin x$.
- Si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\tan x$.

Le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{Avec} \quad t=\tan\frac{x}{2} \quad \text{on a} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.\end{array}}$$

16. Développements limités

16.1. Formules de Taylor

Les trois formules de Taylor s'écrivent sous la forme $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$ où $T_n(x)$ est toujours le même polynôme de Taylor :

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

C'est l'expression du reste $R_n(x)$ qui change :
Taylor-Young (la plus utile), f de classe $\mathscr{C}^n$:

$$R_n(x) = (x-a)^n \varepsilon(x) \quad \text{avec } \varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$$

Taylor avec reste intégral, f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$:

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$, f est $n+1$ fois dérivable :

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Notations.

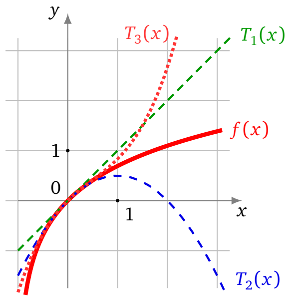
— $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de *classe $\mathscr{C}^n$* si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue.

— « *petit o* ». $o((x-a)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a} \frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n} = 0$. Donc le reste $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ est noté $o((x-a)^n)$.

Formule de Taylor-Young au voisinage de 0.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

Approximations.
Les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Les graphes des polynômes $T_1, T_2, T_3, \ldots$ s'approchent de plus en plus du graphe de f. Ceci n'est vrai qu'autour de la valeur a (Ci-dessous $f(x) = \ln(1+x)$ en $a = 0$).



Approximation numérique de $\sin(0,01)$. La formule de Taylor pour $f(x) = \sin x$ en $a = 0$ à l'ordre 3 : $f(x) = 0 + 1 \cdot x + 0 \cdot \frac{x^2}{2!} - 1\frac{x^3}{3!} + o(x^3)$, Pour $x = 0,01$: $\sin(0,01) \simeq 0,01 - \frac{(0,01)^3}{6} = 0,00999983333\ldots$

16.2. Développements limités au voisinage d'un point

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction sur I un intervalle ouvert. Pour $a \in I$ et $n \in \mathbb{N}$, on dit que f admet un *développement limité* (*DL*) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que pour tout $x \in I$:

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

La formule de Taylor-Young fournit des DL en posant, pour $k = 0, 1, \ldots, n$:

$$\boxed{c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$$

Proposition. *Si f admet un DL alors ce DL est unique.*

Exemple : Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).

DL des fonctions usuelles à l'origine

$$\boxed{\exp x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

DL des fonctions en un point quelconque
On ramène le problème en 0 avec le changement de variables $h = x - a$.
Exemple : DL de $f(x) = \exp x$ en 1. On pose $h = x - 1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. $\exp x = \exp(1 + (x-1)) = \exp(1)\exp(x-1) = e\exp h = e\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \cdots\right) = e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots\right)$.

16.3. Opérations sur les développements limités

Somme, produit, composition. Soient f et g ayant des DL en 0 à l'ordre n :
$f(x) = C(x) + o(x^n) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n + x^n\varepsilon_1(x)$
$g(x) = D(c) + o(x^n) = d_0 + d_1x + \cdots + d_nx^n + x^n\varepsilon_2(x)$

Proposition.

— $(f+g)(x) = C(x) + D(x) + o(x^n)$

— $(f \times g)(x) = C(x) \times D(x) + o(x^n)$

— *Si $g(0) = 0$ (c'est-à-dire $d_0 = 0$), $(f \circ g)(x) = C(D(x)) + o(x^n)$*

Pour le produit et la composition, il faut en plus *tronquer* la partie polynomiale à l'ordre n, c-à-d conserver seulement les monômes de degré $\leqslant n$.
Division. Le DL d'un quotient se ramène au calcul de l'inverse $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 - u^3 + \cdots$$

Intégration. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dont le DL en 0 à l'ordre n est $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + o(x^n)$.

Théorème. *Notons F une primitive de f. Alors F admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$ obtenu en intégrant terme à terme :*

$$F(x) = F(0) + c_0x + c_1\frac{x^2}{2} + c_2\frac{x^3}{3} + \cdots + c_n\frac{x^{n+1}}{n+1} + o(x^{n+1})$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(0)$ près.

16.4. Applications des développements limités

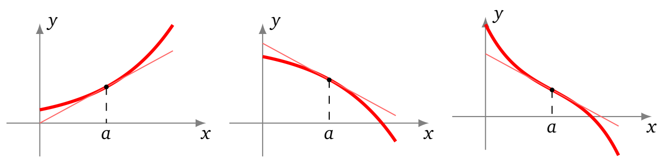
Calculs de limites. Les DL sont très efficaces pour lever des formes indéterminées !
Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en a : $f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_k(x-a)^k + (x-a)^k\varepsilon(x)$, où $c_k \neq 0$. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y = c_0 + c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.*

— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.

— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.

— Si ce signe change alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un *point d'inflexion*.



Développement limité en $+\infty$ (développement asymptotique)
$f :]x_0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admet un *DL en $+\infty$* à l'ordre n s'il existe des réels $c_0, c_1, \ldots, c_n$ tels que $f(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \cdots + \frac{c_n}{x^n} + \frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ où $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x \to +\infty$.
Cela équivaut à ce que $x \to f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.

Proposition. *Si $\frac{f(x)}{x} = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_k}{x^k} + \frac{1}{x^k}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, où $a_k \neq 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty} f(x) - (a_0x + a_1) = 0$ (resp. $x \to -\infty$) : la droite $y = a_0x + a_1$ est une* asymptote *à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x) - y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.*

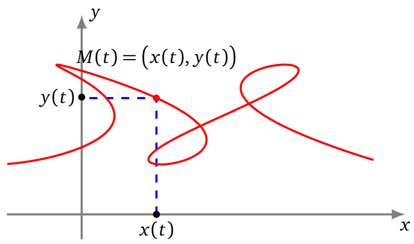
17. Courbes paramétrées

17.1. Notions de base

Une ***courbe paramétrée plane*** est une application

$$f: \begin{array}{ccc} D\subset\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ t & \mapsto & f(t) \end{array}$$

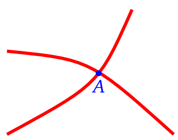
d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$.
On note aussi $f(t) = M(t) = \binom{x(t)}{y(t)}$.



Réduction du domaine d'étude
On utilise des transformations pour réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée. Voici l'effet des transformations usuelles sur le point $M(x, y)$ (dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$).

- Translation de vecteur $\vec{u}(a, b)$: $t_{\vec{u}}(M) = (x+a, y+b)$.
- Réflexion d'axe (Ox) : $s_{(Ox)}(M) = (x, -y)$.
- Réflexion d'axe (Oy) : $s_{(Oy)}(M) = (-x, y)$.
- Symétrie centrale de centre O : $s_O(M) = (-x, -y)$.
- Symétrie centrale de centre $I(a, b)$: $s_I(M) = (2a-x, 2b-y)$.
- Réflexion d'axe la droite (D) d'équation $y = x$: $s_D(M) = (y, x)$.
- Réflexion d'axe la droite (D') d'équation $y = -x$: $s_{D'}(M) = (-y, -x)$.
- Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O : $\mathrm{rot}_{O,\pi/2}(M) = (-y, x)$.
- Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ autour de O : $\mathrm{rot}_{O,-\pi/2}(M) = (y, -x)$.

Points simples, points multiples
La ***multiplicité*** du point A par rapport à la courbe f est le nombre de réels t pour lesquels $M(t) = A$.

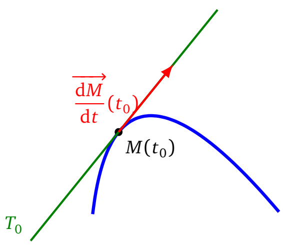


On dit aussi ***point simple*** (multiplicité 1), ***point double*** (multiplicité 2)...
Une ***courbe paramétrée simple*** est une courbe dont tous les points sont de multiplicité 1, c'est-à-dire $t \mapsto M(t)$ est injective.
Pour trouver les points multiples d'une courbe, on cherche les couples $(t, u) \in D^2$ tels que $t > u$ et $M(t) = M(u)$.

17.2. Tangente à une courbe paramétrée

- Une courbe admet une ***tangente*** en $M(t_0)$ si la droite $(M(t_0)M(t))$ admet une position limite quand t tend vers t_0.
- Une courbe paramétrée $t \mapsto M(t) = (x(t), y(t))$ est ***dérivable*** si les fonctions x et y le sont. Le ***vecteur dérivé*** de la courbe en t_0 est $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$.
- Si $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit ***régulier***.
- Si $\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}(t_0) = \vec{0}$, le point $M(t_0)$ est dit ***singulier***.

Théorème. *En tout point régulier d'une courbe dérivable, cette courbe admet une tangente. La tangente en un point régulier est dirigée par le vecteur dérivé en ce point.*



17.3. Points singuliers – Branches infinies

Tangente en un point singulier
En un point singulier le vecteur dérivé est nul, il n'est d'aucune utilité pour la recherche d'une tangente.

En un point $M(t_0)$ singulier, on étudie $\lim_{t\to t_0} \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$. Si cette limite est un réel ℓ, la tangente en $M(t_0)$ existe et a pour coefficient directeur ℓ. Si cette limite existe mais est infinie, la tangente en $M(t_0)$ existe et est verticale.

Position d'une courbe par rapport à sa tangente
Quand la courbe arrive en $M(t_0)$, le long de sa tangente, on a plusieurs possibilités :

- la courbe continue dans le même sens, sans traverser la tangente : c'est un ***point d'allure ordinaire***,
- la courbe continue dans le même sens, en traversant la tangente : c'est un ***point d'inflexion***,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette tangente en la traversant, c'est un ***point de rebroussement de première espèce***,
- la courbe rebrousse chemin le long de cette tangente sans la traverser, c'est un ***point de rebroussement de seconde espèce***.

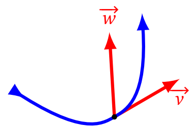
Pour déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente en un point singulier $M(t_0)$, on effectue un DL des coordonnées de $M(t) = \big(x(t), y(t)\big)$ au voisinage de $t = t_0$. Supposons $t_0 = 0$ et

$$M(t) = M(0) + t^p\,\vec{v} + t^q\,\vec{w} + t^q\,\vec{\varepsilon}(t)$$

où :

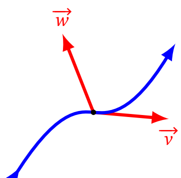
- $p < q$ sont des entiers,
- $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs non colinéaires,
- $\vec{\varepsilon}(t)$ est un vecteur, tel que $\|\vec{\varepsilon}(t)\| \to 0$ lorsque $t \to t_0$.

En un tel point $M(0)$, la courbe $\mathscr{C}$ admet une tangente, dont un vecteur directeur est $\vec{v}$. La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à cette tangente est donnée par la parité de p et q :



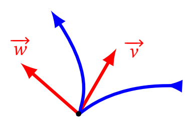
p impair, q pair

point d'allure ordinaire



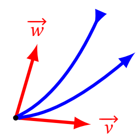
p impair, q impair

point d'inflexion



p pair, q impair

rebroussement de première espèce



p pair, q pair

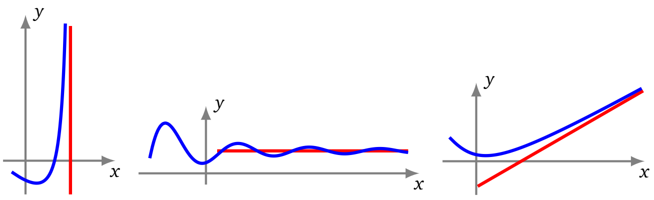
rebroussement de seconde espèce

Branches infinies
Dans ce paragraphe, la courbe $f : t \mapsto M(t)$ est définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et t_0 désigne l'une des bornes de I et n'est pas dans I (t_0 est soit un réel, soit $-\infty$, soit $+\infty$).
Il y a ***branche infinie*** en t_0 dès que l'une au moins des deux fonctions $|x|$ ou $|y|$ tend vers l'infini quand t tend vers t_0. Il revient au même de dire que $\lim_{t\to t_0} \|f(t)\| = +\infty$.
La droite d'équation $y = ax+b$ est ***asymptote*** à $\mathscr{C}$ si $y(t) - \big(ax(t)+b\big) \to 0$, lorsque $t \to t_0$.

1. Si, quand t tend vers t_0, $x(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et $y(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $y = \ell$ est ***asymptote horizontale*** à $\mathscr{C}$.
2. Si, quand t tend vers t_0, $y(t)$ tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) et $x(t)$ tend vers un réel ℓ, la droite d'équation $x = \ell$ est ***asymptote verticale*** à $\mathscr{C}$.
3. La droite d'équation $y = ax + b$ est ***asymptote oblique*** à la courbe $\big(x(t), y(t)\big)$ si :

   (a) $\frac{y(t)}{x(t)}$ tend vers un réel non nul a,

   (b) $y(t) - ax(t)$ tend vers un réel b (nul ou pas).



Attention ! Une branche infinie peut ne pas admettre de droite asymptote, comme dans le cas d'une parabole.

17.4. Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1. Domaine de définition de la courbe.
2. Vecteur dérivé.
3. Tableau de variations conjointes.
4. Étude des points singuliers.
5. Étude des branches infinies.
6. Construction méticuleuse de la courbe.
7. Points multiples.

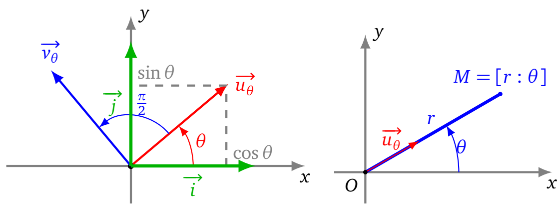
17.5. Courbes en polaires : théorie

Coordonnées polaires

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Pour θ réel, on pose

$$\vec{u_\theta} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{v_\theta} = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j} = \overrightarrow{u_{\theta+\pi/2}}.$$

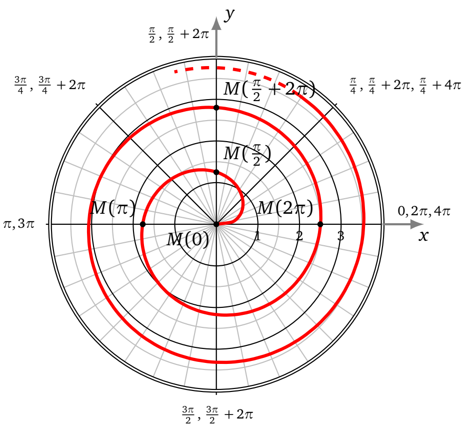
$$M = [r:\theta] \iff \overrightarrow{OM} = r\vec{u_\theta} \iff M = O + r\vec{u_\theta}.$$



La courbe d'*équation polaire* $r = f(\theta)$ est l'application suivante, où les coordonnées des points sont données en coordonnées polaires :

$$F: \begin{array}{ccc} D & \to & \mathbb{R}^2 \\ \theta & \mapsto & M(\theta) = \big[r(\theta):\theta\big] = O + r(\theta)\vec{u}_\theta \end{array}$$

Exemple. Spirale d'équation polaire $r = \sqrt{\theta}$, pour $\theta \in [0, +\infty[$.

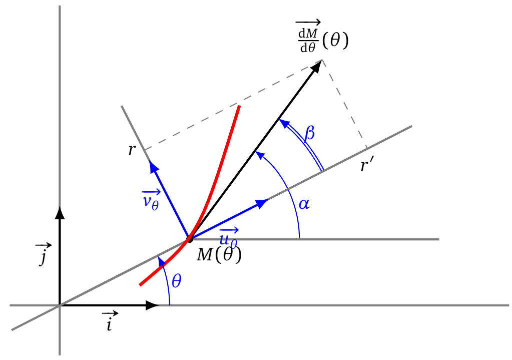


Calcul de la vitesse en polaires

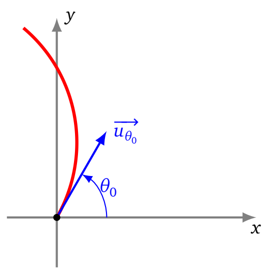
$$\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = \vec{v_\theta} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{v_\theta}}{\mathrm{d}\theta} = -\vec{u_\theta}$$

Théorème (Tangente en un point distinct de l'origine)**.**

1. *Tout point de $\mathscr{C}$ distinct de l'origine O est un point régulier.*
2. *Si $M(\theta) \neq O$, la tangente en $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur* $\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{M}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = r'(\theta)\vec{u_\theta} + r(\theta)\vec{v_\theta}}$
3. *L'angle β entre le vecteur $\vec{u_\theta}$ et la tangente en $M(\theta)$ vérifie* $\boxed{\tan(\beta) = \frac{r}{r'}}$ *si $r' \neq 0$, et $\beta = \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$ sinon.*



Théorème (Tangente à l'origine)**.** *Si $M(\theta_0) = O$, la tangente en $M(\theta_0)$ est la droite d'angle polaire θ_0.*



17.6. Courbes en polaires : exemples

Réduction du domaine d'étude

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct, M étant le point de coordonnées polaires $[r:\theta]$.

— Réflexion d'axe (Ox). $s_{(Ox)} : [r:\theta] \mapsto [r:-\theta]$.
— Réflexion d'axe (Oy). $s_{(Oy)} : [r:\theta] \mapsto [r:\pi-\theta]$.
— Symétrie centrale de centre O. $s_O : [r:\theta] \mapsto [r:\theta+\pi] = [-r:\theta]$.
— Réflexion d'axe la droite D d'équation $(y = x)$. $s_D(M) : [r:\theta] \mapsto [r:\frac{\pi}{2}-\theta]$.
— Réflexion d'axe la droite D' d'équation $(y = -x)$. $s_{D'}(M) : [r:\theta] \mapsto [-r:\frac{\pi}{2}-\theta] = [r:-\frac{\pi}{2}-\theta]$.
— Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ autour de O. $r_{O,\pi/2} : [r:\theta] \mapsto [r:\theta+\frac{\pi}{2}]$.
— Rotation d'angle φ autour de O. $r_{O,\varphi} : [r:\theta] \mapsto [r:\theta+\varphi]$.

Plan d'étude

1. Domaine de définition.
2. Passages par l'origine.
3. Variations de r.
4. Tangentes parallèles aux axes.
5. Étude des branches infinies.
6. Construction de la courbe.
   — Si r est positif et croît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
   — Si r est négatif et décroît, on tourne dans le sens direct en s'écartant de l'origine.
   — Si r est positif et décroît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.
   — Si r est négatif et croît, on tourne dans le sens direct en se rapprochant de l'origine.
7. Points multiples.

18. Équations différentielles

18.1. Définitions

— Une *équation différentielle* d'ordre n est une équation de la forme

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E_{\text{diff}})$$

où F est une fonction de $(n+2)$ variables.

— Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E_{diff}). Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions.

— *Exemple.* Une équation différentielle *à variables séparées* est une équation du type $y' = g(x)/f(y)$ ou $y' f(y) = g(x)$. Une telle équation se résout par calcul de primitives de part et d'autre de l'égalité $y' f(y) = g(x)$.

— Une équation différentielle *linéaire* est de la forme

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \qquad (E)$$

où les a_i et g sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

— Une équation différentielle linéaire est *homogène*, ou *sans second membre*, si la fonction g est nulle :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (E_h)$$

— Une équation différentielle linéaire est *à coefficients constants* si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :

$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x)$$

où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Proposition (Principe de linéarité). *Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E_h) alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.*

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire (E) avec second membre ;

1. Trouver une solution particulière y_p de l'équation (E).
2. Trouver l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions y_h de l'équation homogène associée (E_h).
3. Conclure par le principe de linéarité : les solutions de (E) sont les

$$y = y_p + y_h \quad \text{avec} \quad y_h \in \mathcal{S}_h.$$

18.2. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle *linéaire du premier ordre* est une équation du type $y' = a(x)y + b(x)$ où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Théorème ($y' = ay$). *Les solutions de $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\boxed{y(x) = ke^{ax}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Preuve rapide : on intègre à gauche et à droite l'équation $\frac{y'}{y} = a$ pour trouver : $\ln|y(x)| = ax + b$. Donc $|y(x)| = e^{ax+b}$. Ainsi $y(x) = \pm e^b e^{ax}$.
Exemple : $3y' - 5y = 0$ a pour solution $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème ($y' = a(x)y$). *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Les solutions de $y' = a(x)y$ sont les fonctions y définies par :*

$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$

où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple : $x^2 y' = y$ sur $I =]0, +\infty[$. L'équation est $y' = \frac{1}{x^2}y$, donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Les solutions sont $y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème ($y' = a(x)y + b(x)$). *Soit l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ où $a, b : I \to \mathbb{R}$. Soit y_p une solution particulière et $y_h(x)$ les solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$. Les solutions sont les $y = y_p + y_h$.*

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

— On trouve les solutions $y(x) = ke^{A(x)}$ de l'équation homogène $y' = a(x)y$ où k est une constante.

— On cherche une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$ sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction.

— L'équation $y_p' = a(x)y_p + b(x)$ permet de déterminer $k'(x)$, puis $k(x)$.

Recherche d'une solution particulière : cas des coefficients constants.
$y' = ax + g(x)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante. Le principe est de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.

— Si $g(x) = P(x)$ est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est aussi un polynôme de degré n.

— Si $g(x) = ce^{\beta x}$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = de^{\beta x}$.

— Si $g(x) = c_1 \cos(\beta x) + c_2 \sin(\beta x)$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = d_1 \cos(\beta x) + d_2 \sin(\beta x)$,

Théorème (de Cauchy-Lipschitz). *Soit $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y' = a(x)y + b(x)$ et $y(x_0) = y_0$.*

18.3. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g continue sur I intervalle ouvert.
L'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_h)$$

L'*équation caractéristique* est $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème.

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_h) sont les*

$$\boxed{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0 et les solutions de (E_h) sont les*

$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $r_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ et les solutions de (E_h) sont les*

$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(Attention ! $y'' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$.)
Équation avec second membre

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation (E) admet une* **unique** *solution y sur I satisfaisant aux conditions initiales :*

$$\boxed{y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1}$$

Second membre $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$. $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$
Cela comprend le cas $g(x) = e^{\alpha x}$ (donc $P(x) = 1$ et alors $Q(x)$ est une constante ci-dessous) et le cas $g(x) = P(x)$ (donc $\alpha = 0$).
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

— $y_p(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 0$), si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,

— $y_p(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 1$), si α est une racine simple de l'équation caractéristique,

— $y_p(x) = x^2 e^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 2$), si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Second membre du type $e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$.
Cela comprend le cas $g(x) = c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)$ (donc $\alpha = 0$ et P_1 et P_2 polynômes constants).
Si $g(x) = e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

— $y_p(x) = e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$, si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,

— $y_p(x) = xe^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$, si $\alpha + \mathrm{i}\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.
Méthode de variation des constantes.
Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_h), on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions.

Troisième partie
Formules de L1 – Algèbre

19. Logique et raisonnements

19.1. Logique

Une *assertion* est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.
Et logique. L'assertion « P et Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P *et* Q » est fausse sinon.
Sa *table de vérité* :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Table de vérité de « P *et* Q »

Ou logique. L'assertion « P ou Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P *ou* Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

Table de vérité de « P *ou* Q »

L'assertion « non P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	V	F
non P	F	V

Table de vérité de « *non* P »

L'implication $\implies$
La définition mathématique est la suivante :

$$\boxed{\text{L'assertion « (non } P\text{) ou } Q \text{ » est notée « } P \implies Q \text{ ».}}$$

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

Table de vérité de « $P \implies Q$ »

L'équivalence $\iff$
L'*équivalence* est définie par :

$$\boxed{\text{« } P \iff Q \text{ » est l'assertion « } (P \implies Q) \text{ et } (Q \implies P) \text{ ».}}$$

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

Table de vérité de « $P \iff Q$ »

Proposition. *Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :*

1. $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \implies Q$ » $\iff$ « $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ »

Le quantificateur $\forall$: « *pour tout* »
L'assertion

$$\forall x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.
Le quantificateur $\exists$: « *il existe* »
L'assertion

$$\exists x \in E \quad P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.
La négation des quantificateurs

$$\boxed{\text{La négation de « } \forall x \in E \quad P(x) \text{ » est « } \exists x \in E \quad \text{non } P(x) \text{ ».}}$$

$$\boxed{\text{La négation de « } \exists x \in E \quad P(x) \text{ » est « } \forall x \in E \quad \text{non } P(x) \text{ ».}}$$

L'ordre des quantificateurs est très important.

19.2. Raisonnements

Raisonnement direct
On veut montrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Cas par cas
Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de *disjonction* ou du *cas par cas*.

Contraposée
Le raisonnement par *contraposition* est basé sur l'équivalence suivante :

$$\boxed{\text{L'assertion « } P \implies Q \text{ » est équivalente à « non}(Q) \implies \text{non}(P) \text{ ».}}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \implies Q$ », on montre en fait que si non(Q) est vraie alors non(P) est vraie.

Absurde
Le *raisonnement par l'absurde* pour montrer « $P \implies Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \implies Q$ » est vraie.

Contre-exemple
Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un *contre-exemple*.

Récurrence
Le *principe de récurrence* permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration se déroule en trois étapes :

- *initialisation* : on prouve $P(0)$.
- *hérédité* : qui commence par « Je fixe $n \geqslant 0$ et je suppose que l'assertion $P(n)$ vraie. je vais montrer que l'assertion $P(n+1)$ (au rang suivant) est vraie… »
- *conclusion* : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

20. Ensembles et applications

20.1. Ensembles

- Un *ensemble* est une collection d'éléments.
- L'*ensemble vide*, $\varnothing$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.
- On note

$$\boxed{x \in E}$$

si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.
- L'*inclusion*. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E \ (x \in F)$. On dit alors que E est un *sous-ensemble* de F ou une *partie* de F.
- L'*égalité*. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
- *Ensemble des parties* de E. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1,2,3\}$:

$$\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

- *Complémentaire*. Si $A \subset E$,

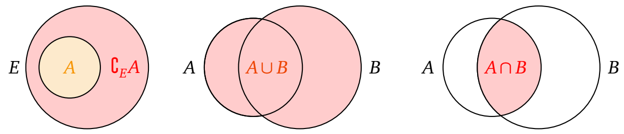
$$\boxed{\complement_E A = \big\{x \in E \mid x \notin A\big\}}$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste $\complement A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou $\overline{A}$).
- *Union*. Pour $A, B \subset E$,

$$\boxed{A \cup B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\big\}}$$

Le « *ou* » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.
- *Intersection*.

$$\boxed{A \cap B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\big\}}$$



Règles de calculs

Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.

- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
- $A \cap \varnothing = \varnothing, \quad A \cap A = A, \quad A \subset B \iff A \cap B = A$

- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut écrire $A \cup B \cup C$ sans ambigüité)
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cup A = A, \quad A \subset B \iff A \cup B = B$

- $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
- $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

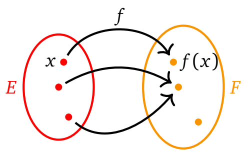
- $\complement\big(\complement A\big) = A \quad$ et donc $\quad A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$
- $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
- $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

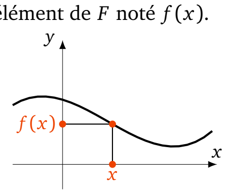
Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien*, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

20.2. Applications

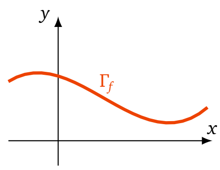
- Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.



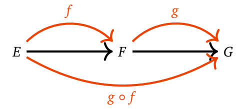


- *Égalité*. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
- Le *graphe* de $f : E \to F$ est

$$\boxed{\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}}$$



- *Composition*. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.



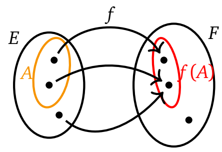
- *Restriction*. Soient $f : E \to F$ et $A \subset E$ alors la restriction de f à A est l'application $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

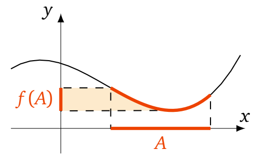
Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles.

Définition. Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'*image directe* de A par f est l'ensemble

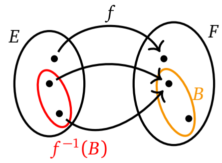
$$\boxed{f(A) = \big\{f(x) \mid x \in A\big\}}$$

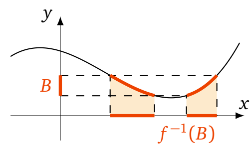




Définition. Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'*image réciproque* de B par f est l'ensemble

$$\boxed{f^{-1}(B) = \big\{x \in E \mid f(x) \in B\big\}}$$





Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y. En termes d'image réciproque l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

20.3. Injection, surjection, bijection

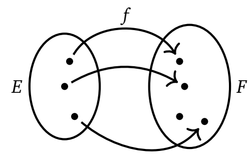
Injection, surjection

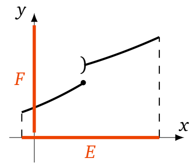
Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition. f est *injective* si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)}$$

Les applications f représentées sont injectives :



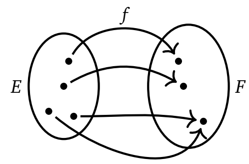


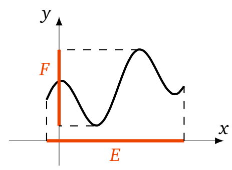
Définition. f est *surjective* si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

Les applications f représentées sont surjectives :





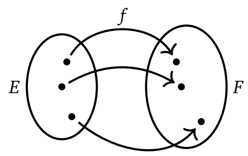
- f est injective si et seulement si tout élément y de F a *au plus* un antécédent (et éventuellement aucun).
- f est surjective si et seulement si tout élément y de F a *au moins* un antécédent.

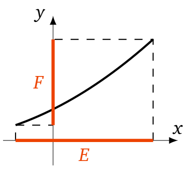
Bijection

Définition. f est ***bijective*** si elle est injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f.





Proposition. *Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la* **bijection réciproque** *de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Proposition. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

20.4. Ensembles finis

Définition. Un ensemble E est ***fini*** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le ***cardinal*** de E (ou le ***nombre d'éléments***) et est noté $\operatorname{Card} E$. Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Quelques propriétés :

— Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et $\operatorname{Card} B \leqslant \operatorname{Card} A$.

— Si A, B sont des ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$) alors $\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B$.

— Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors $\operatorname{Card}(A \setminus B) = \operatorname{Card} A - \operatorname{Card} B$. En particulier si $B \subset A$ et $\operatorname{Card} A = \operatorname{Card} B$ alors $A = B$.

— Enfin pour A, B deux ensembles finis quelconques :

$$\boxed{\operatorname{Card}(A \cup B) = \operatorname{Card} A + \operatorname{Card} B - \operatorname{Card}(A \cap B)}$$

Injection, surjection, bijection

Proposition. *Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.*

1. *Si f est injective alors $\operatorname{Card} E \leqslant \operatorname{Card} F$.*
2. *Si f est surjective alors $\operatorname{Card} E \geqslant \operatorname{Card} F$.*
3. *Si f est bijective alors $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$.*

Proposition. *Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si $\operatorname{Card} E = \operatorname{Card} F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. f est injective,
ii. f est surjective,
iii. f est bijective.

Proposition (Principe des tiroirs)**.** *Si l'on range dans k tiroirs, $n > k$ paires de chaussettes alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.*

Nombres d'applications

Soient E, F des ensembles finis, non vides. On note $\operatorname{Card} E = n$ et $\operatorname{Card} F = p$.

Proposition. *Le nombre d'applications différentes de E dans F est :* $\boxed{p^n}$

Autrement dit c'est $\boxed{(\operatorname{Card} F)^{\operatorname{Card} E}}$.

Proposition. *Le nombre d'injections de E dans F est :*

$$p \times (p-1) \times \cdots \times (p-(n-1)).$$

Notation ***factorielle*** : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Avec $1! = 1$ et par convention $0! = 1$.

Proposition. *Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même est :* $\boxed{n!}$

Coefficients du binôme de Newton

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Proposition. *Il y a $2^{\operatorname{Card} E}$ sous-ensembles de E :* $\boxed{\operatorname{Card} \mathscr{P}(E) = 2^n}$

Définition. Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

Proposition.

— $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

— $\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$

— $\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n}$

Proposition.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (0 < k < n)}$$

Le triangle de Pascal est un algorithme pour calculer ces coefficients $\binom{n}{k}$. Chaque élément est obtenu en ajoutant les deux nombres qui lui sont juste au-dessus et au-dessus à gauche.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Proposition.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Formule du binôme de Newton

Théorème. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et n un entier positif alors :*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}$$

Autrement dit :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

20.5. Relation d'équivalence

Une ***relation*** sur un ensemble E, c'est la donnée pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.

Définition. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation, c'est une ***relation d'équivalence*** si :

— $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x,\quad$ (***réflexivité***)

— $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x,\quad$ (***symétrie***)

— $\forall x, y, z \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \implies x \mathscr{R} z,\quad$ (***transitivité***)

Définition. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la ***classe d'équivalence*** de x est

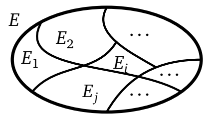
$$\boxed{\operatorname{cl}(x) = \left\{y \in E \mid y \mathscr{R} x\right\}}$$

$\operatorname{cl}(x)$ est donc un sous-ensemble de E, on le note aussi $\overline{x}$. Si $y \in \operatorname{cl}(x)$, on dit que y un ***représentant*** de $\operatorname{cl}(x)$.

Proposition.

1. *$cl(x) = cl(y) \iff x \mathscr{R} y$.*
2. *Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \varnothing$.*
3. *Soit C un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\left\{cl(x) \mid x \in C\right\}$ constitue une partition de E.*

Une ***partition*** de E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E tel que $E = \bigcup_i E_i$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ (si $i \neq j$).



L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. La relation suivante sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence :

$$\boxed{a \equiv b \pmod n \quad \iff \quad a - b \text{ est un multiple de } n}$$

La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est notée $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \operatorname{cl}(a) = \left\{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod n\right\}.$$

Comme un tel b s'écrit $b = a + kn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\overline{a} = a + n\mathbb{Z} = \left\{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble

$$\boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\right\}}$$

qui contient exactement n éléments.

21. Nombres complexes

21.1. $z = a + \mathrm{i}\,b$

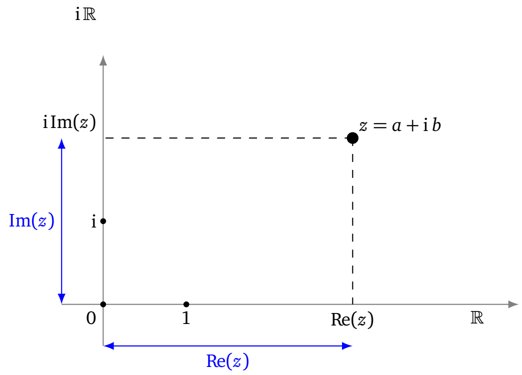
Un ***nombre complexe*** est un couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $a + \mathrm{i}\,b$, avec :

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

Pour $z = a + \mathrm{i}\,b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\,b'$:

- ***addition*** : $(a + \mathrm{i}\,b) + (a' + \mathrm{i}\,b') = (a + a') + \mathrm{i}(b + b')$
- ***multiplication*** : $(a + \mathrm{i}\,b) \times (a' + \mathrm{i}\,b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$. On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle et la relation $\mathrm{i}^2 = -1$

Soit $z = a + \mathrm{i}\,b$ un nombre complexe, sa ***partie réelle*** est le réel a et on la note $\mathrm{Re}(z)$; sa ***partie imaginaire*** est le réel b et on la note $\mathrm{Im}(z)$.



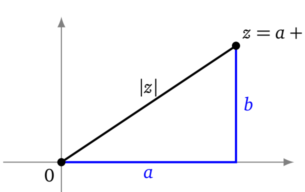
- L'***inverse*** : si $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ (où $1 = 1 + \mathrm{i} \times 0$).
- La ***division*** : $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \frac{1}{z'}$.
- Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
- Puissances : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ (n fois, $n \in \mathbb{N}$). Par convention $z^0 = 1$ et $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

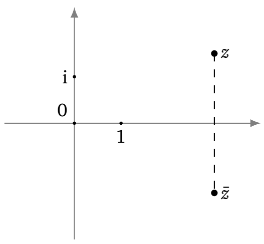
Proposition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1 :*

$$\boxed{1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.}$$

21.2. Module

- Le ***module*** de $z = a + \mathrm{i}\,b$ est le réel positif $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Le ***conjugué*** de $z = a + \mathrm{i}\,b$ est $\boxed{\bar{z} = a - \mathrm{i}\,b}$.
- $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$ car $z \times \bar{z} = (a + \mathrm{i}\,b)(a - \mathrm{i}\,b) = a^2 + b^2$.

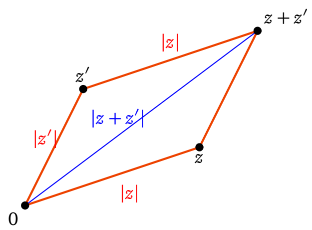




- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$, $\quad \bar{\bar{z}} = z$, $\quad \overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$, $\quad |\bar{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z||z'|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$

Proposition (L'inégalité triangulaire)**.**

$$\boxed{|z + z'| \leqslant |z| + |z'|}$$



21.3. Équation du second degré

Pour $z \in \mathbb{C}$, une ***racine carrée*** est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$. Tout nombre complexe, admet deux racines carrées, ω et $-\omega$.

Proposition. *L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ éventuellement confondues.*
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Alors les solutions sont

$$\boxed{z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.}$$

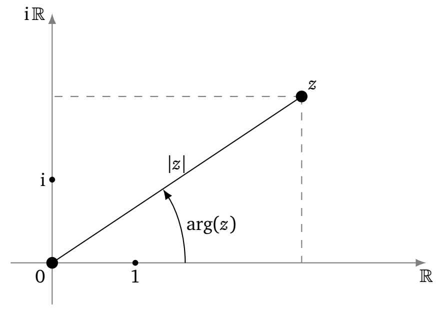
Corollaire. *Si les coefficients a, b, c sont réels alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :*

- *si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,*
- *si $\Delta = 0$, la racine double est réelle et vaut $-\frac{b}{2a}$,*
- *si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.*

Théorème (d'Alembert–Gauss)**.** *Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité. Il existe donc des nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ (dont certains sont éventuellement confondus) tels que $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.*

21.4. Argument

Pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z| (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appelé un ***argument*** de z et noté $\theta = \arg(z)$.



Cet argument est défini modulo 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$ (ou bien $\theta \in [0, 2\pi[$).

$$\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$$

Proposition.

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) \equiv n \arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$

21.5. Formule de Moivre, notation exponentielle

La ***formule de Moivre*** est :

$$\boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

Nous définissons la ***notation exponentielle*** par

$$\boxed{e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

et donc tout nombre complexe s'écrit

$$\boxed{z = \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}}$$

où $\rho = |z|$ est le module et $\theta = \arg(z)$ est un argument.

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z = \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = \rho' e^{\mathrm{i}\,\theta'}$:

- $zz' = \rho\rho' e^{\mathrm{i}\,\theta} e^{\mathrm{i}\,\theta'} = \rho\rho' e^{\mathrm{i}(\theta + \theta')}$
- $z^n = \left(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \rho^n \left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \rho^n e^{\mathrm{i}\,n\theta}$
- $1/z = 1/\left(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{\rho} e^{-\mathrm{i}\,\theta}$

— $\bar{z} = \rho e^{-\mathrm{i}\theta}$

La formule de Moivre se réduit à l'égalité : $\boxed{\left(e^{\mathrm{i}\theta}\right)^n = e^{\mathrm{i}n\theta}}$.

Enfin : $\rho e^{\mathrm{i}\theta} = \rho' e^{\mathrm{i}\theta'}$ (avec $\rho, \rho' > 0$) si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

21.6. Racines n-ième

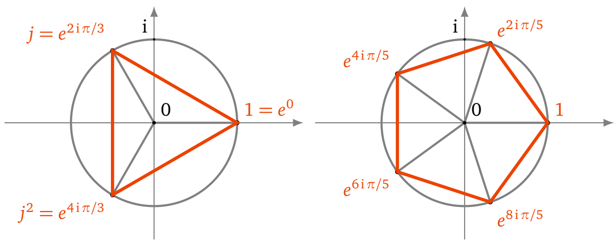
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une *racine n-ième* est un nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition. *Il y a n racines n-ièmes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ de $z = \rho e^{\mathrm{i}\theta}$, ce sont :*

$$\boxed{\omega_k = \rho^{1/n} e^{\frac{\mathrm{i}\theta + 2\mathrm{i}k\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Par exemple pour $z = 1$, on obtient les n *racines n-ièmes de l'unité* :

$$\boxed{e^{2\mathrm{i}k\pi/n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$



Racine 3-ième (à gauche) et 5-ième de l'unité

21.7. Applications à la trigonométrie

Formules d'Euler, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}}$$

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta) = (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta \\
&= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + \mathrm{i}\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Linéarisation. On exprime $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ pour k allant de 0 à n.

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple.

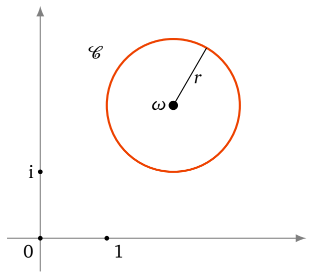
$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left((e^{\mathrm{i}\theta})^3 - 3(e^{\mathrm{i}\theta})^2 e^{-\mathrm{i}\theta} + 3e^{\mathrm{i}\theta}(e^{-\mathrm{i}\theta})^2 - (e^{-\mathrm{i}\theta})^3\right) \\
&= \frac{1}{-8\mathrm{i}}\left(e^{3\mathrm{i}\theta} - 3e^{\mathrm{i}\theta} + 3e^{-\mathrm{i}\theta} - e^{-3\mathrm{i}\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3\mathrm{i}\theta} - e^{-3\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}} - 3\frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}\right) \\
&= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

21.8. Équation complexe d'un cercle

L'équation du cercle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ de centre Ω, d'affixe ω et de rayon r est

$$\boxed{z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2}$$

Il est plus simple de retrouver la formule à chaque fois : $\mathrm{dist}(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2$.



21.9. Équation complexe d'une droite

La droite d'équation $ax + by = c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$) a pour équation complexe :

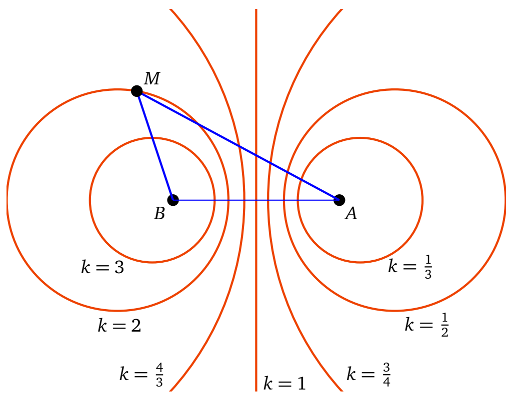
$$\boxed{\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k}$$

où $\omega = a + \mathrm{i}b \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$.

21.10. Équation $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$

Proposition. *Soit A, B deux points du plan et $k \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ est*

— *une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,*
— *un cercle, sinon.*



22. Arithmétique

22.1. Division euclidienne et pgcd

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que b ***divise*** a et on note $b|a$ s'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq$.

Théorème (Division euclidienne)**.** *Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Il* **existe** *des entiers $q, r \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$\boxed{a = bq + r \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant r < b}$$

De plus q et r sont **uniques***.*

Terminologie : q est le ***quotient*** et r est le ***reste***.
Nous avons donc l'équivalence : $r = 0$ si et seulement si b divise a.
Pgcd de deux entiers
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$ deux entiers, non tous les deux nuls. Le plus grand entier qui divise à la fois a et b s'appelle le ***plus grand diviseur commun*** de a, b et se note $\mathrm{pgcd}(a, b)$.
Algorithme d'Euclide

Lemme. *Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$. Écrivons la division euclidienne $a = bq + r$. Alors*

$$\boxed{\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r)}$$

Algorithme d'Euclide.
On souhaite calculer le pgcd de $a, b \in \mathbb{N}^*$. On peut supposer $a \geqslant b$. On calcule des divisions euclidiennes successives. Le pgcd sera le dernier reste non nul :

- division de a par b, $a = bq_1 + r_1$. Par le lemme, $\mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r_1)$ et si $r_1 = 0$ alors $\mathrm{pgcd}(a, b) = b$ sinon on continue :
- $b = r_1 q_2 + r_2$, $\quad \mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(b, r_1) = \mathrm{pgcd}(r_1, r_2)$,
- $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, $\quad \mathrm{pgcd}(a, b) = \mathrm{pgcd}(r_2, r_3)$,
- ...

Nombres premiers entre eux
Deux entiers a, b sont ***premiers entre eux*** si $\mathrm{pgcd}(a, b) = 1$.
Si deux entiers $a, b \in \mathbb{Z}$ ne sont pas premiers entre eux, on peut s'y ramener en divisant par $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

$$\begin{cases} a &= a'd \\ b &= b'd \end{cases} \qquad \text{avec} \qquad a', b' \in \mathbb{Z} \text{ et } \mathrm{pgcd}(a', b') = 1$$

22.2. Théorème de Bézout

Théorème (Théorème de Bézout)**.** *Soient a, b des entiers. Il existe des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$\boxed{au + bv = \mathrm{pgcd}(a, b)}$$

Les entiers u, v sont des ***coefficients de Bézout***. Ils s'obtiennent en « remontant » l'algorithme d'Euclide.

Corollaire. *Si $d|a$ et $d|b$ alors $d|\mathrm{pgcd}(a, b)$.*

Corollaire. *Soient a, b deux entiers. a et b sont premiers entre eux* ***si et seulement si*** *il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que*

$$\boxed{au + bv = 1}$$

Remarque. Si on trouve deux entiers u', v' tels que $au' + bv' = d$, cela n'implique **pas** que $d = \mathrm{pgcd}(a, b)$. On sait seulement alors que $\mathrm{pgcd}(a, b)|d$.

Corollaire (Lemme de Gauss)**.** *Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$.*

$$\boxed{\text{Si} \quad a|bc \quad \text{et} \quad \mathrm{pgcd}(a, b) = 1 \quad \text{alors} \quad a|c}$$

Équations $ax + by = c$

Proposition. *Considérons l'équation*

$$ax + by = c \tag{E}$$

où $a, b, c \in \mathbb{Z}$.

1. *L'équation (E) possède des solutions $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, b)|c$.*
2. *Si $\mathrm{pgcd}(a, b)|c$ alors il existe même une infinité de solutions entières et elles sont exactement les $(x, y) = (x_0 + \alpha k, y_0 + \beta k)$ avec $x_0, y_0, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ fixés et k parcourant $\mathbb{Z}$.*

ppcm
Le $\mathrm{ppcm}(a, b)$ (***plus petit multiple commun***) est le plus petit entier $\geqslant 0$ divisible par a et par b.

Proposition. *Si a, b sont des entiers (non tous les deux nuls) alors*

$$\boxed{\mathrm{pgcd}(a, b) \times \mathrm{ppcm}(a, b) = |ab|}$$

Proposition. *Si $a|c$ et $b|c$ alors $\mathrm{ppcm}(a, b)|c$.*

22.3. Nombres premiers

Un ***nombre premier*** p est un entier $\geqslant 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et p.

Proposition. *Il existe une infinité de nombres premiers.*

Remarque. Si un nombre n n'est pas premier alors un de ses facteurs est $\leqslant \sqrt{n}$.

Proposition (Lemme d'Euclide)**.** *Soit p un nombre premier. Si $p|ab$ alors $p|a$ ou $p|b$.*

Théorème (Décomposition en facteurs premiers)**.** *Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il existe des nombres premiers $p_1 < p_2 < \cdots < p_r$ et des exposants entiers $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r \geqslant 1$ tels que :*

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_r^{\alpha_r}.$$

De plus les p_i et les α_i $(i = 1, \ldots, r)$ sont uniques.

22.4. Congruences

Soit $n \geqslant 2$ un entier. On dit que a est ***congru*** à b ***modulo*** n, si n divise $b - a$. On note alors

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

On note aussi parfois $a = b \pmod{n}$ ou $a \equiv b[n]$. Une autre formulation est

$$\boxed{a \equiv b \pmod{n} \quad \iff \quad \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = b + kn.}$$

Remarquez que n divise a si et seulement si $a \equiv 0 \pmod{n}$.

Proposition.

1. *La relation « congru modulo n » est une relation d'équivalence :*
   - *(Réflexivité) $a \equiv a \pmod{n}$,*
   - *(Symétrie) si $a \equiv b \pmod{n}$ alors $b \equiv a \pmod{n}$,*
   - *(Transitivité) si $a \equiv b \pmod{n}$ et $b \equiv c \pmod{n}$ alors $a \equiv c \pmod{n}$.*
2. *Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $a + c \equiv b + d \pmod{n}$.*
3. *Si $a \equiv b \pmod{n}$ et $c \equiv d \pmod{n}$ alors $a \times c \equiv b \times d \pmod{n}$.*
4. *Si $a \equiv b \pmod{n}$ alors pour tout $k \geqslant 0$, $a^k \equiv b^k \pmod{n}$.*

Équation de congruence $ax \equiv b \pmod{n}$

Proposition. *Soit $a \in \mathbb{Z}^*$, $b \in \mathbb{Z}$ fixés et $n \geqslant 2$. Considérons l'équation $\boxed{ax \equiv b \pmod{n}}$ d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$:*

1. *Il existe des solutions si et seulement si $\mathrm{pgcd}(a, n)|b$.*
2. *Les solutions sont de la forme $x = x_0 + \ell \frac{n}{\mathrm{pgcd}(a,n)}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ où x_0 est une solution particulière. Il existe donc $\mathrm{pgcd}(a, n)$ classes de solutions.*

Théorème (Petit théorème de Fermat)**.** *Si p est un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$ alors*

$$\boxed{a^p \equiv a \pmod{p}}$$

Corollaire. *Si p ne divise pas a alors*

$$\boxed{a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}}$$

23. Polynômes

23.1. Définitions

Un ***polynôme*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est une expression :

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_2X^2 + a_1X + a_0$$

- Les $a_i \in \mathbb{K}$ sont appelés les ***coefficients*** du polynôme.
- Si $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ est le ***degré*** de P, noté $\deg P$. (Convention : le degré du polynôme nul est $-\infty$.)
- $\mathbb{K}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes.
- $\mathbb{K}_n[X]$ est l'ensemble des polynômes de degré $\leqslant n$.
- Deux polynômes sont ***égaux*** si et seulement si ils ont les mêmes coefficients.

Multiplication. Soient $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ et $Q = b_mX^m + b_{m-1}X^{m-1} + \cdots + b_1X + b_0$. $P \times Q$ est un polynôme de degré $n+m$ avec :

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j \text{ pour } k \in \{0, \ldots, r\}.$$

$$\boxed{\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q \qquad \deg(P+Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)}$$

- Les polynômes comportant un seul terme non nul (du type a_kX^k) sont appelés ***monômes***.
- Soit $P = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$, un polynôme avec $a_n \neq 0$. On appelle ***terme dominant*** le monôme a_nX^n. Le coefficient a_n est appelé le ***coefficient dominant*** de P.
- Si le coefficient dominant est 1, on dit que P est un ***polynôme unitaire***.

23.2. Arithmétique des polynômes

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B ***divise*** A s'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$. On note alors $B|A$. On dit aussi que A est multiple de B ou que A est divisible par B.

Théorème (Division euclidienne des polynômes)**.** *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$, avec $B \neq 0$, alors il existe un unique polynôme Q et il existe un unique polynôme R tels que :*

$$\boxed{A = BQ + R \quad \text{et} \quad \deg R < \deg B.}$$

Q est appelé le ***quotient*** et R le ***reste*** et cette écriture est la ***division euclidienne*** de A par B.
Notez que la condition $\deg R < \deg B$ signifie $R = 0$ ou bien $0 \leqslant \deg R < \deg B$.
Enfin $R = 0$ si et seulement si $B|A$.

Exemple. On pose une division de polynômes comme une division euclidienne de deux entiers. Par exemple si $A = 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1$ et $B = X^2 - X + 1$. Alors on trouve $Q = 2X^2 + X - 3$ et $R = -X + 2$.

$$\begin{array}{rr|l}
 & 2X^4 - X^3 - 2X^2 + 3X - 1 & X^2 - X + 1 \\ \cline{3-3}
- & 2X^4 - 2X^3 + 2X^2 & \\ \cline{2-2}
 & X^3 - 4X^2 + 3X - 1 & 2X^2 + X - 3 \\
- & X^3 - X^2 + X & \\ \cline{2-2}
 & -3X^2 + 2X - 1 & \\
- & -3X^2 + 3X - 3 & \\ \cline{2-2}
 & -X + 2 &
\end{array}$$

Le ***pgcd*** (plus grand commun diviseur) de A et B est l'unique polynôme unitaire de plus grand degré qui divise à la fois A et B.
Algorithme d'Euclide. Soient A et B des polynômes, $B \neq 0$. Si $A = BQ + R$ alors $\mathrm{pgcd}(A, B) = \mathrm{pgcd}(B, R)$. On calcule des divisions euclidiennes successives,

$$\begin{array}{ll}
A = BQ_1 + R_1 & \deg R_1 < \deg B \\
B = R_1Q_2 + R_2 & \deg R_2 < \deg R_1 \\
R_1 = R_2Q_3 + R_3 & \deg R_3 < \deg R_2 \\
\ldots &
\end{array}$$

Le degré du reste diminue à chaque division. Le pgcd est le dernier reste non nul R_k (rendu unitaire).
A et B sont ***premiers entre eux*** si $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$. Pour A, B quelconques on peut se ramener à des polynômes premiers entre eux : si $\mathrm{pgcd}(A, B) = D$ alors A et B s'écrivent : $A = DA'$, $B = DB'$ avec $\mathrm{pgcd}(A', B') = 1$.

Théorème (de Bézout)**.** *Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ des polynômes avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. On note $D = \mathrm{pgcd}(A, B)$. Il existe deux polynômes $U, V \in \mathbb{K}[X]$ tels que $AU + BV = D$.*

Corollaire. *Soient A et B deux polynômes. A et B sont premiers entre eux si et seulement s'il existe deux polynômes U et V tels que $AU + BV = 1$.*

Corollaire. *Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$ avec $A \neq 0$ ou $B \neq 0$. Si $C|A$ et $C|B$ alors $C|\mathrm{pgcd}(A, B)$.*

Corollaire (Lemme de Gauss)**.** *Soient $A, B, C \in \mathbb{K}[X]$. Si $A|BC$ et $\mathrm{pgcd}(A, B) = 1$ alors $A|C$.*

23.3. Racine d'un polynôme, factorisation

$\alpha \in \mathbb{K}$ est une ***racine*** (ou un ***zéro***) de $P \in \mathbb{K}[X]$ si $P(\alpha) = 0$.

$$\boxed{P(\alpha) = 0 \quad \iff \quad X - \alpha \text{ divise } P}$$

α est une ***racine de multiplicité k*** de P est équivalent à l'une des propriétés suivantes :

(i) $P(\alpha) = P'(\alpha) = \cdots = P^{(k-1)}(\alpha) = 0$ et $P^{(k)}(\alpha) \neq 0$.
(ii) Il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P = (X - \alpha)^k Q$, avec $Q(\alpha) \neq 0$.
(iii) $(X - \alpha)^k$ divise P alors que $(X - \alpha)^{k+1}$ ne divise pas P.

Théorème (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.** *Tout polynôme à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ a au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Il admet exactement n racines si on compte chaque racine avec multiplicité.*

Exemple. Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ de degré 2 à coefficients a, b, c réels.
- Si $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, P a 2 racines réelles distinctes $\frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
- Si $\Delta < 0$, P a 2 racines complexes conjuguées $\frac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
- Si $\Delta = 0$ P a une racine réelle double $\frac{-b}{2a}$.

Polynômes irréductibles
- Un polynôme ***irréductible*** P est donc un polynôme non constant dont les seuls diviseurs de P sont les constantes ou P lui-même (à une constante multiplicative près). Cela correspond à la notion de nombre premier pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$.
- Dans le cas contraire, P est ***réductible*** : il existe $A, B \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P = AB$, avec $\deg A \geqslant 1$ et $\deg B \geqslant 1$.

Théorème (Factorisation sur $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}$)**.**
1. *Tout polynôme unitaire s'écrit de manière unique comme un produit de polynômes irréductibles unitaires.*
2. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.*
   Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ se factorise en produit de polynômes de degré 1 dans $\mathbb{C}[X]$.
3. *Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et ceux de degré 2 ayant un discriminant $\Delta < 0$.*
   Tout $P \in \mathbb{C}[X]$ se factorise en produit de polynômes irréductibles de degré 1 ou 2 dans $\mathbb{C}[X]$.

Exemple. Soit $P(X) = X^4 + 1$.
- Sur $\mathbb{C}$. D'abord $P(X) = (X^2 + \mathrm{i})(X^2 - \mathrm{i})$. Les racines de P sont les racines carrées complexes de i et $-\mathrm{i}$. Ainsi P se factorise dans $\mathbb{C}[X]$:
$$P(X) = \Big(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\Big)\Big(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\mathrm{i})\Big)\Big(X - \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\Big)\Big(X + \tfrac{\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})\Big)$$
- Sur $\mathbb{R}$ on regroupe les facteurs ayant des racines conjuguées :
$$P(X) = \big[X^2 + \sqrt{2}X + 1\big]\big[X^2 - \sqrt{2}X + 1\big]$$

23.4. Fractions rationnelles

Une ***fraction rationnelle*** à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une expression de la forme $F = \frac{P}{Q}$ où $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ sont deux polynômes et $Q \neq 0$.

Théorème (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$)**.** *Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$ et $Q = (X - \alpha_1)^{k_1} \cdots (X - \alpha_r)^{k_r}$. Alors il existe une et une seule écriture :*

$$\begin{aligned}
\frac{P}{Q} = E(X) &+ \frac{a_{1,1}}{(X-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{a_{1,2}}{(X-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{a_{1,k_1}}{(X-\alpha_1)} \\
&+ \frac{a_{2,1}}{(X-\alpha_2)^{k_2}} + \cdots + \frac{a_{2,k_2}}{(X-\alpha_2)} + \cdots
\end{aligned}$$

Le polynôme E s'appelle la ***partie polynomiale*** (ou ***partie entière***). Les termes $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$ sont les ***éléments simples*** sur $\mathbb{C}$.

Théorème (Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$)**.** *Soit P/Q une fraction rationnelle avec $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, $\mathrm{pgcd}(P, Q) = 1$. Alors P/Q s'écrit de manière unique comme somme :*
- *d'une partie polynomiale $E(X)$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{a}{(X-\alpha)^i}$,*
- *d'éléments simples du type $\frac{aX+b}{(X^2+\alpha X+\beta)^i}$,*

où les $X - \alpha$ et $X^2 + \alpha X + \beta$ sont les facteurs irréductibles de $Q(X)$ et les exposants i sont inférieurs ou égaux à la puissance correspondante dans cette factorisation.

24. Groupes

24.1. Définition

Un *groupe* $(G, \star)$ est un ensemble G auquel est associé une opération $\star$ (la *loi de composition*) vérifiant les quatre propriétés suivantes :

1. pour tout $x, y \in G$, $\quad x \star y \in G \quad$ ($\star$ est une *loi de composition interne*)
2. pour tout $x, y, z \in G$, $\quad (x \star y) \star z = x \star (y \star z) \quad$ (la loi est *associative*)
3. il existe $e \in G$ tel que $\quad \forall x \in G,\ x \star e = x \;$ et $\; e \star x = x \quad$ (e est l'*élément neutre*)
4. pour tout $x \in G$ il existe $x' \in G$ tel que $\quad x \star x' = x' \star x = e \quad$ (x' est l'*inverse* de x et est noté x^{-1})

Si de plus l'opération vérifie

$$\text{pour tout } x, y \in G, \qquad x \star y = y \star x,$$

on dit que G est un groupe *commutatif* (ou *abélien*).

Exemples.

— $(\mathbb{R}^*, \times)$, $(\mathbb{Q}^*, \times)$, $(\mathbb{C}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.

— $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$ sont des groupes commutatifs.

— L'ensemble des matrices $n \times n$ inversibles, muni de la multiplication des matrices $\times$, forme un groupe $(\mathcal{GL}_2, \times)$, il est non-commutatif car en général $M \times M' \neq M' \times M$.

Puissance. Soit un groupe $(G, \star)$ et $x \in G$.

— $x^n = \underbrace{x \star x \star \cdots \star x}_{n \text{ fois}}$,

— $x^0 = e$,

— $x^{-n} = \underbrace{x^{-1} \star \cdots \star x^{-1}}_{n \text{ fois}}$.

Pour $x, y \in G$ et $m, n \in \mathbb{Z}$ nous avons :

— $x^m \star x^n = x^{m+n}$,

— $(x^m)^n = x^{mn}$,

— $(x \star y)^{-1} = y^{-1} \star x^{-1}$, $\quad$ attention à l'ordre !

— **Si** $(G, \star)$ est **commutatif** alors $(x \star y)^n = x^n \star y^n$.

24.2. Sous-groupes

Soit $(G, \star)$ un groupe. Une partie $H \subset G$ est un *sous-groupe* de G si :

1. $e \in H$,
2. pour tout $x, y \in H$, on a $x \star y \in H$,
3. pour tout $x \in H$, on a $x^{-1} \in H$.

Notez qu'un sous-groupe H est aussi un groupe $(H, \star)$. La façon la plus rapide de montrer que $(H, \star)$ est un groupe est donc de montrer que c'est un sous-groupe d'un groupe $(G, \star)$.

Critère pratique pour prouver que H est un sous-groupe de G est :

— H contient au moins un élément,

— et pour tout $x, y \in H$, $x \star y^{-1} \in H$.

Exemples :

— $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$.

— $(\mathbb{U}, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$, où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

— $(\mathbb{Z}, +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$.

— $\{e\}$ et G sont les *sous-groupes triviaux* du groupe G.

Proposition. *Les sous-groupes de $(\mathbb{Z}, +)$ sont les $n\mathbb{Z}$, pour $n \in \mathbb{Z}$.*

L'ensemble $n\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des multiples de n : $n\mathbb{Z} = \left\{k \cdot n \mid k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Soit $(G, \star)$ un groupe et $E \subset G$ un sous-ensemble de G. Le *sous-groupe engendré* par E est le plus petit sous-groupe de G contenant E.

Exemple : dans $(\mathbb{Z}, +)$ et $E = \{a, b\}$, le sous-groupe engendré est $H = n\mathbb{Z}$ où $n = \operatorname{pgcd}(a, b)$.

24.3. Morphismes de groupes

Soient $(G, \star)$ et $(G', \diamond)$ deux groupes. Une application $f : G \longrightarrow G'$ est un *morphisme de groupes* si :

$$\boxed{\text{pour tout } x, x' \in G \qquad f(x \star x') = f(x) \diamond f(x')}$$

Exemple : $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$, $\exp(x + x') = \exp(x) \times \exp(x')$.

Pour un morphisme

— $f(e_G) = e_{G'}$,

— pour tout $x \in G$, $f(x^{-1}) = \big(f(x)\big)^{-1}$.

Un morphisme bijectif est un *isomorphisme*. Deux groupes G, G' sont *isomorphes* s'il existe un morphisme bijectif $f : G \longrightarrow G'$.

Exemple : $\exp : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un isomorphisme bijectif, sa bijection réciproque étant le morphisme : $\ln : (\mathbb{R}_+^*, \times) \to (\mathbb{R}, +)$ avec $\ln(x \times x') = \ln(x) + \ln(x')$.

Noyau et image

Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.

— Le *noyau* de f est

$$\boxed{\operatorname{Ker} f = \left\{x \in G \mid f(x) = e_{G'}\right\}}$$

Le noyau est donc l'ensemble des éléments de G qui s'envoient par f sur l'élément neutre de G'.

— L'*image* de f est

$$\boxed{\operatorname{Im} f = \left\{f(x) \mid x \in G\right\}}$$

Ce sont les éléments de G' qui ont (au moins) un antécédent par f.

Proposition. *Soit $f : G \longrightarrow G'$ un morphisme de groupes.*

1. *$\operatorname{Ker} f$ est un sous-groupe de G.*
2. *$\operatorname{Im} f$ est un sous-groupe de G'.*
3. $\boxed{f \text{ est injectif si et seulement si } \operatorname{Ker} f = \{e_G\}}$
4. *f est surjectif si et seulement si $\operatorname{Im} f = G'$.*

24.4. Le groupe $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Fixons $n \geqslant 1$. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est l'ensemble

$$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\right\}$$

où $\overline{p}$ désigne la classe d'équivalence de p modulo n.

$$\boxed{\overline{p} = \overline{q} \Longleftrightarrow p \equiv q \pmod n}$$

ou encore $\overline{p} = \overline{q} \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \quad p = q + kn$.

L'*addition* sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est définie par : $\overline{p} + \overline{q} = \overline{p+q}$.

Proposition. *$(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe commutatif de cardinal n*

L'élément neutre est $\overline{0}$. L'opposé de $\overline{k}$ est $-\overline{k} = \overline{-k} = \overline{n-k}$.

Groupes cycliques de cardinal fini

Un groupe $(G, \star)$ est un groupe *cyclique* s'il existe un élément $a \in G$ tel que :

$$\text{pour tout } x \in G, \text{ il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = a^k$$

Autrement dit le groupe G est engendré par un seul élément a.

Le groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$ est un groupe cyclique. En effet il est engendré par $a = \overline{1}$, car tout élément $\overline{k}$ s'écrit $\overline{k} = \underbrace{\overline{1} + \overline{1} + \cdots \overline{1}}_{k \text{ fois}} = k \cdot \overline{1}$.

Théorème. *Si $(G, \star)$ un groupe cyclique de cardinal n, alors $(G, \star)$ est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +)$.*

24.5. Le groupe des permutations

Fixons un entier $n \geqslant 2$.

Proposition. *L'ensemble des bijections de $\{1, 2, \ldots, n\}$ dans lui-même, muni de la composition des fonctions est un groupe, noté $(\mathcal{S}_n, \circ)$. Le cardinal de $\mathcal{S}_n$ est $n!$.*

Une bijection de $\{1, 2, \ldots, n\}$ (dans lui-même) s'appelle une *permutation*.

Le groupe $(\mathcal{S}_n, \circ)$ s'appelle le *groupe des permutations* (ou le *groupe symétrique*).

L'élément neutre du groupe est l'identité id, le produit est ici la composition et l'inverse correspond à la bijection réciproque.

25. Systèmes linéaires

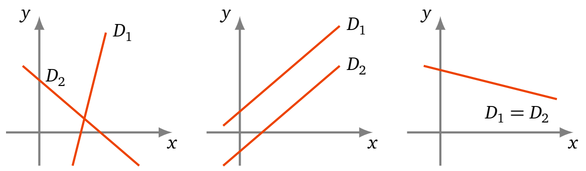
25.1. Introduction aux systèmes d'équations linéaires

Deux droites dans le plan
Calculer l'intersection de deux droites D_1 et D_2 du plan équivaut à résoudre le système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} ax+by & = & e \\ cx+dy & = & f \end{array}\right. \qquad (S)$$

Trois cas :

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point : le système (S) a une seule solution.
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles : le système (S) n'a pas de solution.
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues : le système (S) a une infinité de solutions.



Résolution par la méthode de Cramer
On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le ***déterminant***. Si $ad - bc \neq 0$, on trouve une unique solution à (S) dont les coordonnées (x, y) sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Résolution par inversion de matrice
En termes matriciels, le système linéaire(S) est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \binom{x}{y}$ du système est donnée par

$$X = A^{-1}Y.$$

25.2. Théorie des systèmes linéaires

On appelle ***équation linéaire*** dans les variables (ou ***inconnues***) $x_1, \ldots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b, \qquad (1)$$

où $a_1, \ldots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.
Forme générale d'un ***système de n équations linéaires à p inconnues*** :

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{array}\right.$$

— Les nombres a_{ij}, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, p$, sont les ***coefficients*** du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1, \ldots, n$, constituent le ***second membre*** du système et sont également des données.
— Une ***solution*** du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \ldots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'***ensemble des solutions du système*** est l'ensemble de tous ces p-uplets.
— On dit que deux systèmes linéaires sont ***équivalents*** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Théorème. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

— Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit ***incompatible***.
— Un ***système homogène*** c'est lorsque le second membre est nul : $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la *solution triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$.

25.3. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Un système est ***échelonné*** si :

— le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est ***échelonné réduit*** si en plus :

— le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;
— et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Opérations sur les équations d'un système

Les trois opérations élémentaires sur les équations sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire par des opérations élémentaires sur les lignes. Les étapes sont :

1. Passage à une forme échelonnée.
2. Passage à une forme réduite.
3. Solutions.

Théorème. *Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.*

26. Matrices

26.1. Définition

Un matrice de ***taille*** $n \times p$ (n lignes et p colonnes) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = \left(a_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$$

L'ensemble de telles matrices est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

— Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite ***matrice carrée***. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la ***diagonale principale***.

— La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la ***matrice nulle*** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0.

Définition (Somme de deux matrices)**.** Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur ***somme*** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)**.** Le produit d'une matrice $A = \left(a_{ij}\right)$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice $\left(\alpha a_{ij}\right)$ formée en multipliant chaque coefficient de A par α. Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

26.2. Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Définition (Produit de deux matrices)**.** Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$\boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} + \dots + a_{ip} b_{pj}.$$

Proposition.

1. *$A(BC) = (AB)C$: associativité,*
2. *$A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité,*
3. *$A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.*

Pièges à éviter

— Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
— Deuxième piège. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
— Troisième piège. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

La matrice carrée suivante est la ***matrice identité*** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Si A est une matrice $n \times p$, alors*

$$I_n \cdot A = A \qquad \text{et} \qquad A \cdot I_p = A.$$

Puissance

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. La formule de récurrence est $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

26.3. Inverse d'une matrice : définition

Définition (Matrice inverse)**.** Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \qquad \text{et} \qquad BA = I,$$

on dit que A est ***inversible***. On appelle B l'***inverse de A*** et on la note A^{-1}.

Il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$.

L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition.

— *Si A est inversible, alors son inverse est unique.*
— *Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $\boxed{(A^{-1})^{-1} = A}$.*
— *Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}}$. Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre !*
— *Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.*

26.4. Inverse d'une matrice : calcul

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition. *Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I. En pratique, à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A \mid I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I \mid B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j.
3. $L_i \longleftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

26.5. Inverse d'une matrice : systèmes linéaires

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_{B}.$$

Proposition. *Si la matrice A est inversible, alors la solution du système linéaire $AX = B$ est unique et est :*

$$\boxed{X = A^{-1}B}$$

26.6. Matrices triangulaires, transposée...

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est ***triangulaire inférieure*** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est ***triangulaire supérieure*** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure ***et*** triangulaire supérieure est dite ***diagonale***. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Théorème. *Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.*

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition. On appelle ***matrice transposée*** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji}. Ou encore la i-ème ligne de A devient la i-ème colonne de A^T (et réciproquement la j-ème colonne de A^T est la j-ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent ${}^tA$.

Théorème.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$
5. *Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition. La ***trace*** d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A. Autrement dit,

$$\boxed{\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.}$$

Théorème. *Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :*

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$,
2. $\operatorname{tr}(\alpha A) = \alpha \operatorname{tr} A$ *pour tout* $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\operatorname{tr}(A^T) = \operatorname{tr} A$,
4. $\boxed{\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)}$.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est ***symétrique*** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si $A = A^T$, ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est ***antisymétrique*** si $A^T = -A$, c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.

27. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

27.1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad u+v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad -u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \qquad 0 = 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés définissant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

1. $u+v = v+u$
2. $u+(v+w) = (u+v)+w$
3. $u+0 = 0+u = u$
4. $u+(-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda+\mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Produit scalaire

- u, v sont ***colinéaires*** ssi $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda u + \mu v = 0,\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)$
- ***produit scalaire*** :

$$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \|u\| \, \|v\| \cos \angle(u,v)$$

- ***norme***

$$\|u\| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

- En dimension 3 uniquement, le ***produit vectoriel*** est :

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

- le ***produit mixte***

$$[u,v,w] = \langle u \mid v \wedge w \rangle = \det(u,v,w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel :

1. $\langle v \mid u \rangle = \langle u \mid v \rangle$
2. $\langle \lambda u + u' \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle + \langle u' \mid v \rangle$
3. $\|\lambda u\| = |\lambda| \, \|u\|$
4. $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v colinéaires (*inégalité triangulaire*)
5. $v \wedge u = -u \wedge v$, $u \wedge u = 0$
6. $(\lambda u + u') \wedge v = \lambda (u \wedge v) + u' \wedge v$

27.2. Exemples d'applications linéaires

En notation matricielle, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une ***application linéaire*** si $f(X) = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice notée $\mathrm{Mat}(f)$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$.

réflexion par rapport à l'axe (Ox) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

réflexion par rapport à l'axe (Oy) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

homothétie de rapport λ, centrée à l'origine $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

rotation d'angle θ, centrée à l'origine $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

projection sur l'axe (Ox) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

réflexion par rapport au plan (Oxy) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

rotation d'angle θ d'axe (Oz) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

27.3. Propriétés des applications linéaires

- $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire ssi

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^p,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

- $\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)$
- Si f est bijective, $\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$.

28. Espaces vectoriels

$\mathbb{K}$ désigne un corps, par exemple $\mathbb{R}$.

28.1. Espace vectoriel (début)

Définition. Un ***$\mathbb{K}$-espace vectoriel*** est un ensemble non vide E muni :

— d'une loi de composition interne, c'est-à-dire d'une application de $E \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} E \times E & \to & E \\ (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

— d'une loi de composition externe, c'est-à-dire d'une application de $\mathbb{K} \times E$ dans E :
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{K} \times E & \to & E \\ (\lambda, u) & \mapsto & \lambda \cdot u \end{array}$$

qui vérifient les propriétés suivantes :

1. $u + v = v + u$ (pour tous $u, v \in E$)
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$ (pour tous $u, v, w \in E$)
3. Il existe un ***élément neutre*** $0_E \in E$ tel que $u + 0_E = u$ (pour tout $u \in E$)
4. Tout $u \in E$ admet un ***symétrique*** u' tel que $u + u' = 0_E$. Cet élément u' est noté $-u$.
5. $1 \cdot u = u$ (pour tout $u \in E$)
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$ (pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $u, v \in E$)
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$ (pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $u \in E$)

Exemple fondamental : $E = \mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

— Addition : $(x_1, \ldots, x_n) + (x'_1, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, \ldots, x_n + x'_n)$.
— Multiplication par un scalaire : $\lambda \cdot (x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$.
— L'élément neutre : vecteur nul $(0, 0, \ldots, 0)$.
— Le symétrique de $(x_1, \ldots, x_n)$ est $(-x_1, \ldots, -x_n)$, que l'on note $-(x_1, \ldots, x_n)$.

28.2. Espace vectoriel (fin)

Vocabulaire :

— Un élément de E est un ***vecteur***.
— Un élément de $\mathbb{K}$ est un ***scalaire***.
— L'élément neutre 0_E s'appelle le ***vecteur nul***. Il est unique.
— Pour chaque $u \in E$, son ***symétrique*** (ou ***opposé***) $-u$ est unique.

Proposition. *Soit E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$. Soient $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors on a :*

1. $0 \cdot u = 0_E$
2. $\lambda \cdot 0_E = 0_E$
3. $(-1) \cdot u = -u$
4. $\boxed{\lambda \cdot u = 0_E \iff \lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E}$

Exemple. L'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

— Soient f et g deux éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La fonction $f + g$ est définie par : $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).
— Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $\lambda \cdot f$ est définie par $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \times f(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).
— L'élément neutre est la fonction nulle, définie par $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
— Le symétrique de f est $-f$ définie $(-f)(x) = -f(x)$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

Autres exemples :

— L'ensemble $\mathcal{S}$ des suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
— L'ensemble $M_{n,p}(\mathbb{R})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
— L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes est un espace vectoriel.

28.3. Sous-espace vectoriel (début)

Définition. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une partie F de E est appelée un ***sous-espace vectoriel*** si :

— $0_E \in F$,
— $u + v \in F$ pour tous $u, v \in F$ (F est stable pour l'addition),
— $\lambda \cdot u \in F$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $u \in F$ (F est stable pour la multiplication par un scalaire).

Exemples :

— L'ensemble des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
— L'ensemble des suites réelles convergentes est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des suites réelles.
— Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Soit $AX = 0$ un système d'équations linéaires homogènes à p variables. Alors l'ensemble des vecteurs solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.

Un sous-espace vectoriel est lui-même un espace vectoriel.

Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F un sous-espace vectoriel de E. Alors F est lui-même un $\mathbb{K}$-espace vectoriel pour les lois induites par E.*

Méthodologie. Pour répondre à une question du type « L'ensemble F est-il un espace vectoriel ? », une façon efficace de procéder est de trouver un espace vectoriel E qui contient F, puis prouver que F est un sous-espace vectoriel de E.

28.4. Sous-espace vectoriel (milieu)

Soit $n \geqslant 1$ un entier, soient $v_1, v_2, \ldots, v_n$, n vecteurs d'un espace vectoriel E. Tout vecteur de la forme
$$u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$$
est appelé ***combinaison linéaire*** des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_n$. Les scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont appelés ***coefficients*** de la combinaison linéaire.
Remarque : si $n = 1$, alors $u = \lambda_1 v_1$ et on dit que u est ***colinéaire*** à v_1.

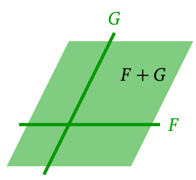
Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie non vide de E. F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si*
$$\lambda u + \mu v \in F \qquad \text{pour tout } u, v \in F \quad \text{et tout } \lambda, \mu \in \mathbb{K}.$$

Proposition (Intersection de deux sous-espaces)**.** *Soient F, G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'intersection $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.*

La réunion de deux sous-espaces vectoriels de E n'est pas en général un sous-espace vectoriel de E.

28.5. Sous-espace vectoriel (fin)

Définition (Somme de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. L'ensemble de tous les éléments $u + v$, où u est un élément de F et v un élément de G, est appelé ***somme*** des sous-espaces vectoriels F et G. Cette somme est notée $F + G$. On a donc
$$F + G = \{u + v \mid u \in F, v \in G\}.$$



Proposition.

1. *$F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.*
2. *$F + G$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant à la fois F et G.*

Définition (Somme directe de deux sous-espaces)**.** Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. F et G sont en ***somme directe*** dans E si :

— $F \cap G = \{0_E\}$,
— $F + G = E$.

On note alors $F \oplus G = E$ et on dit que F et G sont des sous-espaces vectoriels ***supplémentaires*** dans E.

Proposition. *F et G sont supplémentaires dans E si et seulement si tout élément de E s'écrit d'une manière* **unique** *comme la somme d'un élément de F et d'un élément de G.*

Exemple. Dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel des fonctions paires $\mathcal{P}$ et le sous-espace vectoriel des fonctions impaires $\mathcal{I}$ sont supplémentaires : $\mathcal{P} \oplus \mathcal{I} = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Théorème (Sous-espace engendré)**.** *Soit $\{v_1, \ldots, v_n\}$ un ensemble fini de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Alors :*

— *L'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est un sous-espace vectoriel de E, appelé* ***sous-espace engendré par $v_1, \ldots, v_n$*** *et noté $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n)$.*
Ainsi : $u \in \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \iff$ il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n$
— *C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ (si F est un sous-espace vectoriel de E contenant aussi les vecteurs $v_1, \ldots, v_n$ alors $\mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_n) \subset F$).*

28.6. Application linéaire (début)

Définition. Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Une application f de E dans F est une ***application linéaire*** si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1. $f(u+v) = f(u)+f(v)$, pour tous $u, v \in E$;
2. $f(\lambda \cdot u) = \lambda \cdot f(u)$, pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

L'application f est linéaire si et seulement si, pour tous $u, v \in E$ et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$,

$$\boxed{f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)}$$

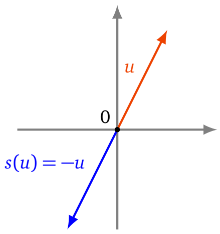
Plus généralement, une application linéaire f préserve les combinaisons linéaires.
Exemple. Pour une matrice fixée $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, l'application $f : \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f(X) = AX$ est une application linéaire.

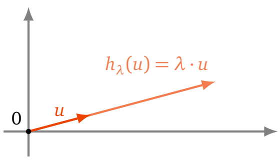
Proposition. *Si f est une application linéaire de E dans F, alors :*
- $f(0_E) = 0_F$,
- $f(-u) = -f(u)$, *pour tout $u \in E$.*

Vocabulaire :
- L'***application identité***, notée id_E : $f : E \longrightarrow E$, $f(u) = u$ pour tout $u \in E$.
- Une application linéaire de E dans F est aussi appelée ***morphisme*** ou ***homomorphisme*** d'espaces vectoriels. L'ensemble des applications linéaires de E dans F est noté $\mathscr{L}(E, F)$.
- Une application linéaire de E dans E est appelée ***endomorphisme*** de E. L'ensemble des endomorphismes de E est noté $\mathscr{L}(E)$.

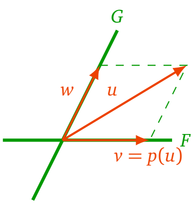
28.7. Application linéaire (milieu)

Symétrie centrale et homothétie.
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. $s : E \to E$, $s(u) = -u$ est linéaire et s'appelle la ***symétrie centrale***. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(u) = \lambda u$ est linéaire et s'appelle l'***homothétie*** de rapport λ.





Projection.
Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E, c'est-à-dire $E = F \oplus G$. Tout vecteur u de E s'écrit de façon unique $u = v + w$ avec $v \in F$ et $w \in G$. La ***projection*** sur F parallèlement à G est l'application $p : E \to E$ définie par $p(u) = v$.



- Une projection est une application linéaire.
- Une projection p vérifie l'égalité $p^2 = p$. Note : $p^2 = p$ signifie $p \circ p = p$, c'est-à-dire pour tout $u \in E$: $p\big(p(u)\big) = p(u)$.

28.8. Application linéaire (fin)

Image
Rappels. Soient E et F deux ensembles et f une application de E dans F. Soit $A \subset E$. L'***image directe*** de A par f est l'ensemble des images par f des éléments de A, appelé $f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}$. C'est un sous-ensemble de F.
Soit maintenant E et F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $f : E \to F$ une application linéaire.
$f(E)$ s'appelle l'***image*** de l'application linéaire f et est noté $\mathrm{Im}\, f$.

Proposition.
1. *$\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de F.*
2. *Plus généralement, si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F.*

Par définition de l'image directe :

f est surjective si et seulement si $\mathrm{Im}\, f = F$.

Noyau

Définition (Définition du noyau)**.** Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F. Le ***noyau*** de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$, est l'ensemble des éléments de E dont l'image est 0_F :

$$\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{x \in E \mid f(x) = 0_F\}}$$

Autrement dit, le noyau est l'image réciproque du vecteur nul de l'espace d'arrivée : $\mathrm{Ker}(f) = f^{-1}\{0_F\}$.

Proposition. *Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.*

Exemple. Un plan $\mathscr{P}$ d'équation $(ax + by + cz = 0)$, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$. En effet c'est le noyau de l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y, z) = ax + by + cz$.

Théorème (Caractérisation des applications linéaires injectives)**.**

$$\boxed{f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}}$$

En particulier, pour montrer que f est injective, il suffit de vérifier que :
si $f(x) = 0_F$ alors $x = 0_E$.

L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E, F)$

Proposition. *L'ensemble des applications linéaires entre deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F, noté $\mathscr{L}(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

Composition et inverse d'applications linéaires

Proposition (Composée de deux applications linéaires)**.** *Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, f une application linéaire de E dans F et g une application linéaire de F dans G. Alors $g \circ f$ est une application linéaire de E dans G.*

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
- Une application linéaire bijective de E sur F est appelée ***isomorphisme*** d'espaces vectoriels. Les deux espaces vectoriels E et F sont alors dits ***isomorphes***.
- Un endomorphisme bijectif de E (c'est-à-dire une application linéaire bijective de E dans E) est appelé ***automorphisme*** de E. L'ensemble des automorphismes de E est noté $GL(E)$.

29. Dimension finie

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

29.1. Famille libre

Une famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de E est une ***famille libre*** ou ***linéairement indépendante*** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \ldots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est ***liée*** ou ***linéairement dépendante***.

Théorème. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ de $p \geqslant 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathcal{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathcal{F}$.*

Exemples :
- Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.
- Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires.

Proposition. *Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathcal{F}$ contient plus de n éléments (c'est-à-dire $p > n$), alors $\mathcal{F}$ est une famille liée.*

29.2. Famille génératrice

Une famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de vecteurs de E est une ***famille génératrice*** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \ldots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \ldots, v_p\}$ ***engendre*** l'espace vectoriel E.
Les vecteurs $\{v_1, \ldots, v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \ldots, v_p)$.

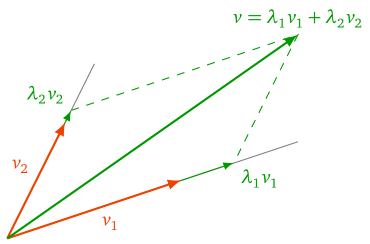
Proposition. *Soit $\mathcal{F} = \{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathcal{F}' = \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_q\}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathcal{F}'$.*

29.3. Base

Une famille $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une **base** de E si $\mathcal{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice.

Théorème. *Si $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ est une base de E, alors tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{B}$. Autrement dit, il* **existe** *des scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$* **uniques** *tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$



Exemples :
- Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \ldots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{K}^n$.
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

Théorème (Théorème d'existence d'une base). *Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base.*

Théorème (Théorème de la base incomplète). *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.*

1. Toute famille libre $\mathcal{L}$ peut être complétée en une base. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{F}$ telle que $\mathcal{L} \cup \mathcal{F}$ soit une famille libre et génératrice de E.*
2. De toute famille génératrice $\mathcal{G}$ on peut extraire une base de E. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathcal{B} \subset \mathcal{G}$ telle que $\mathcal{B}$ soit une famille libre et génératrice de E.*

29.4. Dimension d'un espace vectoriel

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de ***dimension finie***.
Par le théorème d'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

Théorème (Théorème de la dimension). *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments $\dim E$.*

Exemples :
- Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ contient n éléments.
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.

Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :
- $\mathbb{R}[X]$: l'espace vectoriel de tous les polynômes,
- $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathcal{F} = (v_1, \ldots, v_n)$ une famille de* **n** *vecteurs de E. Il y a équivalence entre :*

(i) $\mathcal{F}$ est une base de E,
(ii) $\mathcal{F}$ est une famille libre de E,
(iii) $\mathcal{F}$ est une famille génératrice de E.

29.5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.*
2. *$F = E \iff \dim F = \dim E$.*

Vocabulaire.
- un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé ***droite vectorielle***,
- un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé ***plan vectoriel***,
- un sous-espace vectoriel dimension $n-1$ dans un espace vectoriel de dimension n est appelé ***hyperplan***.

Corollaire. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :*

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Théorème (Théorème des quatre dimensions). *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Corollaire. *Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.*

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.*

30. Matrices et applications linéaires

30.1. Rang d'une famille de vecteurs

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
Rang d'une famille de vecteurs
Soit $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille finie de vecteurs de E. Le *rang* de la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ engendré par les vecteurs $v_1,\dots,v_p$:

$$\boxed{\mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p)=\dim \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)}$$

Proposition. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\{v_1,\dots,v_p\}$ une famille de p vecteurs de E. Alors :*

1. *$0 \leqslant \mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p) \leqslant p$: le rang est inférieur ou égal au nombre d'éléments dans la famille.*
2. *Si E est de dimension finie alors $\mathrm{rg}(v_1,\dots,v_p) \leqslant \dim E$: le rang est inférieur ou égal à la dimension de l'espace ambiant E.*

Exemple. Le rang d'une famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ vaut p si et seulement si la famille $\{v_1,\dots,v_p\}$ est libre.
Rang d'une matrice
Le *rang* d'une matrice est le rang de ses vecteurs colonnes.

Proposition. *Le rang d'une matrice échelonnée par colonnes est égal au nombre de colonnes non nulles.*

Voici un exemple d'une matrice 6×6 échelonnée par colonnes ; les $*$ désignent des coefficients quelconques, les $+$ des coefficients non nuls. Cette matrice est de rang 4.

$$\begin{pmatrix} + & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & + & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & + & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & * & + & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition. *Le rang d'une matrice ayant les colonnes $C_1,C_2,\dots,C_p$ n'est pas modifié par les trois opérations élémentaires suivantes sur les vecteurs :*

1. *$C_i \leftarrow \lambda C_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une colonne par un scalaire non nul.*
2. *$C_i \leftarrow C_i+\lambda C_j$ avec $\lambda\in\mathbb{K}$ (et $j\neq i$) : on peut ajouter à la colonne C_i un multiple d'une autre colonne C_j.*
3. *$C_i \leftrightarrow C_j$: on peut échanger deux colonnes.*

Plus généralement, l'opération $C_i \leftarrow C_i+\sum_{i\neq j}\lambda_j C_j$ conserve le rang de la matrice.
Méthodologie. Comment calculer le rang d'une matrice ou d'un système de vecteurs ?
Il s'agit d'appliquer la méthode de Gauss sur les colonnes de la matrice A (considérée comme une juxtaposition de vecteurs colonnes). Le principe de la méthode de Gauss affirme que par les opérations élémentaires $C_i\leftarrow\lambda C_i$, $C_i\leftarrow C_i+\lambda C_j$, $C_i\leftrightarrow C_j$, on transforme la matrice A en une matrice échelonnée par rapport aux colonnes. Le rang de la matrice est alors le nombre de colonnes non nulles.

Théorème (Matrice inversible et rang). *Une matrice carrée de taille n est inversible si et seulement si elle est de rang n.*

L'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes $(v_i)_{1\leqslant i\leqslant p}$ et l'espace vectoriel engendré par les vecteurs lignes $(w_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ sont de même dimension :

Proposition. $\mathrm{rg}A=\dim\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$

Autrement dit le rang d'une matrice égale le rang de sa transposée :

$$\boxed{\mathrm{rg}A=\mathrm{rg}A^T}$$

Attention ! Les dimensions $\dim\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $\dim\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$ sont égales, mais les espaces vectoriels $\mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_p)$ et $\mathrm{Vect}(w_1,\dots,w_n)$ ne sont pas les mêmes.

30.2. Applications linéaires en dimension finie

E et F sont deux $\mathbb{K}$-espace vectoriels.

Théorème (Construction d'une application linéaire). *Si E est de dimension finie n et $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors pour tout choix $(v_1,\dots,v_n)$ de n vecteurs de F, il existe une et une seule application linéaire $f:E\to F$ telle que, pour tout $i=1,\dots,n$:*

$$f(e_i)=v_i.$$

Rang d'une application linéaire
Soit $f:E\to F$ une application linéaire et E est de dimension finie.

- $\mathrm{Im} f=f(E)=\{f(x)|x\in E\}$ est un espace vectoriel de dimension finie.
- Si $(e_1,\dots,e_n)$ est une base de E, alors $\mathrm{Im} f=\mathrm{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$.

La dimension de cet espace vectoriel $\mathrm{Im} f$ est appelée *rang de f* :

$$\boxed{\mathrm{rg}(f)=\dim\mathrm{Im} f=\dim\mathrm{Vect}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)}$$

Le rang est plus petit que la dimension de E et aussi plus petit que la dimension de F, si F est de dimension finie.
Théorème du rang
On rappelle que le *noyau* de f est $\mathrm{Ker} f=\{x\in E \mid f(x)=0_F\}$, c'est un sous-espace vectoriel de E.

Théorème (Théorème du rang). *Soit $f:E\to F$ une application linéaire, E étant de dimension finie.*

$$\boxed{\dim E=\dim\mathrm{Ker} f+\dim\mathrm{Im} f}$$

Autrement dit : $\boxed{\dim E=\dim\mathrm{Ker} f+\mathrm{rg} f}$
Cette formule sert à déterminer la dimension du noyau connaissant le rang, ou bien le rang connaissant la dimension du noyau.
Application linéaire entre deux espaces de même dimension
$f:E\to F$ est un *isomorphisme* si f est une application linéaire bijective. La bijection réciproque est aussi une application linéaire.

Proposition. *Soit $f:E\to F$ un isomorphisme d'espaces vectoriels. Si E (respectivement F) est de dimension finie, alors F (respectivement E) est aussi de dimension finie et on a $\dim E=\dim F$.*

Voici une sorte de réciproque extrêmement utile :

Théorème. *Soit $f:E\to F$ une application linéaire avec $\dim E=\dim F$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) f est bijective
(ii) f est injective
(iii) f est surjective

Ainsi, si $\dim E=\dim F$, pour montrer que f bijective, il suffit de démontrer f injective ou bien f surjective.

30.3. Matrice d'une application linéaire

- Soit E un espace vectoriel de dimension p et $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_p)$ une base de E
- Soit F un espace vectoriel de dimension n et $\mathscr{B}'=(f_1,\dots,f_n)$ une base de F.
- Soit $f:E\to F$ une application linéaire.
- Pour $j\in\{1,\dots,p\}$, $f(e_j)$ s'écrit de manière dans la base $\mathscr{B}'$:

$$f(e_j)=a_{1j}f_1+a_{2j}f_2+\cdots+a_{nj}f_n=\begin{pmatrix}a_{1j}\\a_{2j}\\ \vdots\\a_{nj}\end{pmatrix}_{\mathscr{B}'}.$$

La *matrice de l'application linéaire* f par rapport aux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est la matrice $(a_{i,j})\in M_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ème colonne est constituée par les coordonnées du vecteur $f(e_j)$ dans la base $\mathscr{B}'=(f_1,f_2,\dots,f_n)$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)=\begin{array}{c} \\ f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} f(e_1) & \dots & f(e_j) & \dots & f(e_p)\end{array}\\ \begin{pmatrix} a_{11} & & a_{1j} & \dots & a_{1p}\\ a_{21} & & a_{2j} & \dots & a_{2p}\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & & a_{nj} & \dots & a_{np}\end{pmatrix}\end{array}$$

Les vecteurs colonnes sont l'image par f des vecteurs de la base de départ $\mathscr{B}$, exprimée dans la base d'arrivée $\mathscr{B}'$.

Matrice d'une composition.
La matrice associée à la composition de deux applications linéaires est le produit des matrices associées à chacune d'elles, dans le même ordre.

Proposition. *Soient $f:E\to F$ et $g:F\to G$ deux applications linéaires et soient $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathscr{B}'$ une base de F et $\mathscr{B}''$ une base de G. Si on note :*

$$A=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(f)\qquad B=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}''}(g)\qquad C=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}''}(g\circ f)$$

Alors

$$C=B\times A$$

Matrice d'un endomorphisme
Soit E un espace vectoriel de dimension n. $f : E \to E$ est un *endomorphisme* (l'espace vectoriel de départ est égal à celui d'arrivée). On choisit généralement la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée, et on note simplement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice associée à f, c'est une matrice carrée de taille $n \times n$.

Exemple.
- Cas de l'identité : $\mathrm{id} : E \to E$, $\mathrm{id}(x) = x$. Quelle que soit la base $\mathcal{B}$ de E, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$.
- Cas d'une homothétie $h_\lambda : E \to E$, $h_\lambda(x) = \lambda \cdot x$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(h_\lambda) = \lambda I_n$.
- Cas d'une symétrie centrale $s : E \to E$, $s(x) = -x$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(s) = -I_n$.
- Cas de $r_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ la rotation d'angle θ, centrée à l'origine, dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\mathcal{B}$: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(r_\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

Si A est la matrice associée à f, alors la matrice associée à $f^p = f \circ f \circ \cdots \circ f$ est $A^p = A \times A \times \cdots \times A$.

Matrice d'un isomorphisme
Soit $f : E \to F$ un *isomorphisme* c'est-à-dire une application linéaire bijective. En dimension finie, on a $\dim E = \dim F$. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.

Théorème (Caractérisation de la matrice d'un isomorphisme)**.**

1. *f est bijective si et seulement si la matrice A est inversible.*
2. *Dans ce cas, la matrice de l'application linéaire $f^{-1} : F \to E$ est la matrice A^{-1}.*

C'est valable pour le cas particulier important d'un endomorphisme $f : E \to E$ où E est muni de la même base $\mathcal{B}$ au départ et à l'arrivée et $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

30.4. Changement de bases

Coordonnées
Soit E un espace vectoriel de base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_p)$. Pour chaque $x \in E$, il existe un p-uplet unique d'éléments de $\mathbb{K}$ $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ tel que

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_p e_p.$$

On note
La matrice des coordonnées de x est un vecteur colonne, noté $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$. Si $\mathcal{B}$ on omet de mentionner la base.

Image
Soit $f : E \to F$ une application linéaire, $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f)$.
- Pour $x \in E$, notons $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Pour $y \in F$, notons $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(y) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition. *Si $y = f(x)$, alors on a* $\boxed{Y = AX}$.

Matrice de passage d'une base à une autre
Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. La *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$, notée $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, est la matrice carrée de taille $n \times n$ dont la j-ème colonne est formée des coordonnées du j-ème vecteur de la base $\mathcal{B}'$, par rapport à la base $\mathcal{B}$.
On résume :

> La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ contient - en colonnes - les coordonnées des vecteurs de la nouvelle base $\mathcal{B}'$ exprimés dans l'ancienne base $\mathcal{B}$.

Proposition. *La matrice de passage $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$ est la matrice associée à l'identité $\mathrm{id}_E : (E, \mathcal{B}') \to (E, \mathcal{B})$:*

$$\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(\mathrm{id}_E)}$$

Faites bien attention à l'inversion de l'ordre des bases !

Proposition.

1. *La matrice de passage d'une base $\mathcal{B}$ vers une base $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est égale à la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ vers la base $\mathcal{B}$:* $\boxed{P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \left(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\right)^{-1}}$
2. *Si $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}''$ sont trois bases, alors* $\boxed{P_{\mathcal{B},\mathcal{B}''} = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \times P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}}$

Changement de coordonnées
- Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.
- Soit $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ vers $\mathcal{B}'$.
- Pour $x \in E$, on note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$.
- Pour ce même $x \in E$, on note $X' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$.

Proposition.

$$\boxed{X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, X'}$$

Notez bien l'ordre !
Formule de changement de base
- Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
- Soit $f : E \to F$ une application linéaire.
- Soient $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}'_E$ deux bases de E.
- Soient $\mathcal{B}_F$, $\mathcal{B}'_F$ deux bases de F.
- Soit $P = P_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}'_E}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_E$ à $\mathcal{B}'_E$.
- Soit $Q = P_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}'_F}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_F$ à $\mathcal{B}'_F$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(f)$ la matrice de f de $\mathcal{B}_E$ vers l$\mathcal{B}_F$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}'_F}(f)$ la matrice de f de $\mathcal{B}'_E$ vers $\mathcal{B}'_F$.

Théorème (Formule de changement de base)**.**

$$\boxed{B = Q^{-1}AP}$$

Cas particulier de $f : E \to E$ endomorphisme.
- Soient $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
- Soit $P = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
- Soit $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$.
- Soit $B = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

$$\boxed{B = P^{-1}AP}$$

Matrices semblables
Soient A et B deux matrices carrées de $M_n(\mathbb{K})$. Elles sont *semblables* s'il existe une matrice inversible $P \in M_n(\mathbb{K})$ telle que $B = P^{-1}AP$.

Corollaire. *Deux matrices semblables représentent le même endomorphisme, mais exprimé dans des bases différentes.*

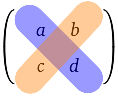
31. Déterminants

$\mathbb{K}$ est un corps commutatif, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

31.1. Déterminant en dimension 2 et 3

Matrice 2×2.

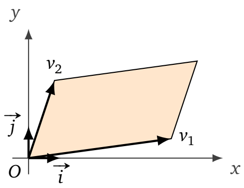
$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$



C'est donc le produit des éléments sur la diagonale principale (en bleu) moins le produit des éléments sur l'autre diagonale (en orange).

Proposition. *L'aire du parallélogramme délimité par* $v_1 = \binom{a}{c}$ *et* $v_2 = \binom{b}{d}$ *est donnée par la valeur absolue du déterminant :*

$$\mathscr{A} = \left|\det(v_1, v_2)\right| = \left|\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right|$$



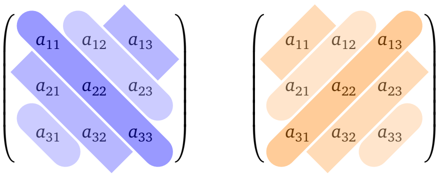
Matrice 3×3. Soit $A \in M_3(\mathbb{K})$ une matrice 3×3 :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

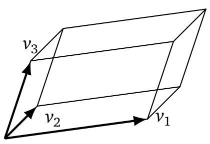
Voici la formule pour le déterminant :

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Règle de Sarrus : Addition de trois produits de trois termes le long de la diagonale descendante (en bleu, à gauche) puis soustraction de trois produits de trois termes le long de la diagonale montante (en orange, à droite)



Proposition. *Le volume du parallélépipède délimité par trois vecteurs* $v_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}$ *est donné par la valeur absolue du déterminant de la matrice correspondante :* $\mathscr{V} = \left|\det(A)\right|$.



31.2. Définition du déterminant

Théorème (Existence et d'unicité du déterminant). *Il existe une unique application de* $M_n(\mathbb{K})$ *dans* $\mathbb{K}$*, appelée* **déterminant**, *telle que*

(i) le déterminant est linéaire par rapport à chaque vecteur colonne, les autres étant fixés ;

(ii) si une matrice A a deux colonnes identiques, alors son déterminant est nul ;

(iii) le déterminant de la matrice identité I_n *vaut* 1.

Le déterminant est donc la seule ***forme multilinéaire*** (propriété (i)), ***alternée*** (propriété (ii)) qui prend comme valeur 1 sur la matrice I_n.
Si on note C_i la i-ème colonne de A, alors

$$\det A = \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_n \end{vmatrix} = \det(C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Avec cette notation, la propriété (i) de linéarité par rapport à la colonne j s'écrit : pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\det(C_1, \ldots, \lambda C_j + \mu C'_j, \ldots, C_n) = \lambda \det(C_1, \ldots, C_j, \ldots, C_n) + \mu \det(C_1, \ldots, C'_j, \ldots, C_n)$, soit

Proposition (Opérations élémentaires sur les colonnes).

1. $C_i \leftarrow \lambda C_i$ *avec* $\lambda \neq 0$: A' *est obtenue en multipliant une colonne de A par un scalaire non nul. Alors* $\det A' = \lambda \det A$.
2. $C_i \leftarrow C_i + \lambda C_j$ *avec* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(et* $j \neq i$*) :* A' *est obtenue en ajoutant à une colonne de A un multiple d'une autre colonne de A. Alors* $\det A' = \det A$.
3. $C_i \leftrightarrow C_j$: A' *est obtenue en échangeant deux colonnes distinctes de A. Alors* $\boxed{\det A' = -\det A}$. *Échanger deux colonnes change le signe du déterminant.*

Corollaire. *Si une colonne* C_i *de la matrice A est combinaison linéaire des autres colonnes, alors* $\det A = 0$.

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure, ou diagonale) est égal au produit des termes diagonaux.*

31.3. Propriétés du déterminant

Déterminant d'un produit

Théorème.

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B}$$

Déterminant des matrices inversibles

Corollaire. *Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul. De plus si A est inversible, alors :*

$$\boxed{\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det A}}$$

Déterminant de la transposée

Corollaire.

$$\boxed{\det\left(A^T\right) = \det A}$$

Conséquence. Par transposition, tout ce que l'on a dit des déterminants à propos des colonnes est vrai pour les lignes : le déterminant est multilinéaire par rapport aux lignes ; si une matrice a deux lignes égales, son déterminant est nul ; on ne modifie pas un déterminant en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, etc.

31.4. Calculs de déterminants

Cofacteur
Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée.

— On note A_{ij} la matrice extraite, obtenue en effaçant la ligne i et la colonne j de A.
— Le nombre $\det A_{ij}$ est un **mineur d'ordre** $n-1$ de la matrice A.
— Le nombre $C_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$ est le ***cofacteur*** de A relatif au coefficient a_{ij}.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Pour déterminer si $C_{ij} = +\det A_{ij}$ ou $C_{ij} = -\det A_{ij}$, on peut se souvenir que l'on associe des signes en suivant le schéma d'un échiquier :

$$A = \begin{pmatrix} + & - & + & - & \ldots \\ - & + & - & + & \ldots \\ + & - & + & - & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{pmatrix}$$

Théorème (Développement suivant une ligne ou une colonne)**.** *Formule de développement par rapport à la ligne i :*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

Formule de développement par rapport à la colonne j :

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} C_{ij}$$

On commence souvent par faire apparaître un maximum de zéros par des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes qui ne modifient pas le déterminant, avant de développer le déterminant suivant la ligne ou la colonne qui a le plus de zéros.

Inverse d'une matrice

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. La matrice C des cofacteurs, appelée ***comatrice***, et notée $\mathrm{Com}(A)$:

$$C = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{n1} & C_{n2} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème. *Soient A une matrice inversible, et C sa comatrice. On a alors*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T}$$

31.5. Applications des déterminants

Méthode de Cramer

Considérons le système d'équations linéaires à n équations et n inconnues suivant :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \quad \ldots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & = & b_n \end{cases}$$

Ce système s'écrit sous forme matricielle $AX = B$ où

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K}), \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Définissons la matrice $A_j \in M_n(\mathbb{K})$ obtenue en remplaçant la j-ème colonne de A par le second membre B :

$$A_j = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Théorème (Règle de Cramer)**.** *Soit $AX = B$ un système de n équations à n inconnues. Supposons que $\det A \neq 0$. Alors l'unique solution $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ du système est donnée par :*

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} \qquad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} \qquad \ldots \qquad x_n = \frac{\det A_n}{\det A}.$$

Déterminant et base

Théorème. *Une famille de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$*

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

forme une base si et seulement si $\det(a_{ij}) \neq 0$.

Calcul du rang d'une matrice

Soit $A = (a_{ij}) \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Le ***rang*** de A est la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes. C'est donc le nombre maximum de vecteurs colonnes linéairement indépendants.

Soit k un entier inférieur à n et à p. On appelle ***mineur d'ordre k*** le déterminant d'une matrice carrée de taille k obtenue à partir de A en supprimant $n-k$ lignes et $p-k$ colonnes.

Théorème. *Le rang d'une matrice $A \in M_{n,p}(\mathbb{K})$ est le plus grand entier r tel qu'il existe un mineur d'ordre r extrait de A non nul.*

Proposition. *Le rang de A est égal au rang de sa transposée A^T.*

Quatrième partie

Formulaires

32. Formules de développements limités

Développements limités usuels (au voisinage de 0)

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!} \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!} \quad + \quad o(x^n)\\
\cos x &= 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})\\
\sin x &= x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\tan x &= x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7 \quad + \quad o(x^8)\\
\operatorname{ch} x &= 1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad + \quad o(x^{2n+1})\\
\operatorname{sh} x &= x+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\operatorname{th} x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5-\frac{17}{315}x^7 \quad + \quad o(x^8)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{x^n}{n} \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{x^k}{k} \quad + \quad o(x^n)\\
(1+x)^\alpha &= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha}{k}x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{1+x} &= 1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{1-x} &= 1+x+x^2+\cdots+x^n \quad + \quad o(x^n)=\sum_{k=0}^{n}x^k \quad + \quad o(x^n)\\
\sqrt{1+x} &= 1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2-\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^n n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
\frac{1}{\sqrt{1+x}} &= 1-\frac{x}{2}+\frac{3}{8}x^2-\cdots+(-1)^n\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^n n!}x^n \quad + \quad o(x^n)\\
\arccos x &= \frac{\pi}{2}-x-\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}-\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}-\cdots-\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\arcsin x &= x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})\\
\arctan x &= x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+(-1)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad + \quad o(x^{2n+2})
\end{aligned}
$$

33. Formules des primitives

C désigne une constante arbitraire. Les intervalles sont à préciser.

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{e^{\alpha t}}{\alpha} + C \quad (\alpha \in \mathbb{C}^*)$$

$$\int t^{\alpha}\,dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1)$$

$$\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan\ t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin\ t + C$$

$$\int \cos t\,dt = \sin t + C$$

$$\int \sin t\,dt = -\cos t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \tan t + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin^2 t} = -\mathrm{cotan}\ t + C$$

$$\int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \tan t\,dt = -\ln|\cos t| + C$$

$$\int \mathrm{cotan}\ t\,dt = \ln|\sin t| + C$$

$$\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$$

$$\int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+\alpha}} = \ln\left|t + \sqrt{t^2+\alpha}\right| + C$$

$$\int \mathrm{ch}\ t\,dt = \mathrm{sh}\ t + C$$

$$\int \mathrm{sh}\ t\,dt = \mathrm{ch}\ t + C$$

$$\int \frac{dt}{\mathrm{ch}^2 t} = \mathrm{th}\ t + C$$

$$\int \frac{dt}{\mathrm{sh}^2 t} = -\mathrm{coth}\ t + C$$

$$\int \frac{dt}{\mathrm{ch}\ t} = 2\arctan e^t + C$$

$$\int \frac{dt}{\mathrm{sh}\ t} = \ln\left|\mathrm{th}\ \frac{t}{2}\right| + C$$

$$\int \mathrm{th}\ t\,dt = \ln(\mathrm{ch}\ t) + C$$

$$\int \mathrm{coth}\ t\,dt = \ln|\mathrm{sh}\ t| + C$$

34. Formulaire : trigonométrie circulaire et hyperbolique

Propriétés trigonométriques : remplacer cos par ch et sin par $i \cdot$ sh.

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$$

$$\cos(a+b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a+b) = \frac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \cdot \tan b}$$

$$\operatorname{ch}(a+b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a+b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{th}(a+b) = \frac{\operatorname{th} a + \operatorname{th} b}{1 + \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\cos(a-b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$
$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a \cdot \tan b}$$

$$\operatorname{ch}(a-b) = \operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b$$
$$\operatorname{sh}(a-b) = \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} b \cdot \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{th}(a-b) = \frac{\operatorname{th} a - \operatorname{th} b}{1 - \operatorname{th} a \cdot \operatorname{th} b}$$

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2\sin^2 a \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \end{aligned}$$
$$\sin 2a = 2 \sin a \cdot \cos a$$
$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1 - \tan^2 a}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} 2a &= 2\operatorname{ch}^2 a - 1 \\ &= 1 + 2\operatorname{sh}^2 a \\ &= \operatorname{ch}^2 a + \operatorname{sh}^2 a \end{aligned}$$
$$\operatorname{sh} 2a = 2 \operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} a$$
$$\operatorname{th} 2a = \frac{2\operatorname{th} a}{1 + \operatorname{th}^2 a}$$

$$\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$
$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin a \cdot \cos b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(a+b) + \operatorname{ch}(a-b)\right]$$
$$\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{sh} b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{ch}(a+b) - \operatorname{ch}(a-b)\right]$$
$$\operatorname{sh} a \cdot \operatorname{ch} b = \frac{1}{2}\left[\operatorname{sh}(a+b) + \operatorname{sh}(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \cos\frac{p-q}{2}$$
$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2} \cdot \cos\frac{p+q}{2}$$

$$\operatorname{ch} p + \operatorname{ch} q = 2\operatorname{ch}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{sh}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p + \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p+q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p-q}{2}$$
$$\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} q = 2\operatorname{sh}\frac{p-q}{2} \cdot \operatorname{ch}\frac{p+q}{2}$$

Avec $t = \tan\frac{x}{2}$ on a

$$\begin{cases} \cos x &= \frac{1-t^2}{1+t^2} \\ \sin x &= \frac{2t}{1+t^2} \\ \tan x &= \frac{2t}{1-t^2} \end{cases}$$

Avec $t = \operatorname{th}\frac{x}{2}$ on a

$$\begin{cases} \operatorname{ch} x &= \frac{1+t^2}{1-t^2} \\ \operatorname{sh} x &= \frac{2t}{1-t^2} \\ \operatorname{th} x &= \frac{2t}{1+t^2} \end{cases}$$

Dérivées : la multiplication par i n'est plus valable

$$\cos' x = -\sin x$$
$$\sin' x = \cos x$$
$$\tan' x = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x$$
$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x$$
$$\operatorname{th}' x = 1 - \operatorname{th}^2 x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$$

$$\arccos' x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x| < 1)$$
$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\operatorname{Argch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x > 1)$$
$$\operatorname{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$
$$\operatorname{Argth}' x = \frac{1}{1-x^2} \quad (|x| < 1)$$

Cinquième partie

Divers

35. Alphabet grec

α		alpha
β		beta
γ	Γ	gamma
δ	Δ	delta
ε		epsilon
ζ		zeta
η		eta
θ	Θ	theta
ι		iota
κ		kappa
λ	Λ	lambda
μ		mu

ν		nu
ξ		xi
o		omicron
π	Π	pi
ρ		rho
σ	Σ	sigma
τ		tau
υ		upsilon
ϕ, φ	Φ	phi
χ		chi
ψ	Ψ	psi
ω	Ω	omega

On rencontre aussi “nabla” ∇, l’opérateur de dérivée partielle ∂ (dit “d rond”), et aussi la première lettre de l’alphabet hébreu “aleph” $\aleph$.

36. Écrire des mathématiques : LaTeX

Pour écrire des mathématiques, il existe un langage pratique et universel, le langage LaTeX (prononcé [latek]). Il est utile pour rédiger des textes contenant des formules, mais aussi accepté sur certains blogs et vous permet d'écrire des maths dans un courriel ou un texto.
Une formule s'écrit entre deux dollars `$\pi^2$` qui donne π^2 ou entre double dollars si l'on veut la centrer sur une nouvelle ligne; `$$\lim u_n = +\infty$$` affichera :

$$\lim u_n = +\infty$$

Dans la suite on omettra les balises dollars.

36.1. Premières commandes

Les exposants s'obtiennent avec la commande `^` et les indices avec `_` : a^2 s'écrit `a^2` ; u_n s'écrit `u_n` ; α_i^2 s'écrit `\alpha_i^2`. Les accolades `{ }` permettent de grouper du texte : `2^{10}` pour 2^{10} ; `a_{i,j}` pour $a_{i,j}$.
Il y a ensuite toute une liste de commandes (qui commencent par `\`) dont voici les plus utiles :

`\sqrt`	$\sqrt{a}$	`\sqrt{a}`
	$\sqrt{1+\sqrt{2}}$	`\sqrt{1+\sqrt{2}}`
	$\sqrt[3]{x}$	`\sqrt[3]{x}`
`\frac`	$\frac{a}{b}$	`\frac{a}{b}`
	$\frac{\pi^3}{12}$	`\frac{\pi^3}{12}`
	$\frac{1}{2+\frac{3}{4}}$	`\frac{1}{2 + \frac{3}{4}}`
	$\gamma^{\frac{1}{n}}$	`\gamma^{\frac{1}{n}}`
`\lim`	$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$	`\lim_{n \to +\infty} u_n = 0`
	$\lim_{x\to 0} f(x) < \varepsilon$	`\lim_{x \to 0} f(x) < \epsilon`
`\sum`	$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i}$	`\sum_{i=1}^n \frac{1}{i}`
	$\sum_{i \geqslant 0} a_i$	`\sum_{i \ge 0} a_i`
`\int`	$\int_a^b \phi(t) dt$	`\int_a^b \phi(t) dt`

36.2. D'autres commandes

Voici d'autres commandes, assez naturelles pour les anglophones.

$f : E \to F$	`f : E \to F`
$+\infty$	`+\infty`
$a \leqslant 0$	`a \le 0`
$a > 0$	`a > 0`
$a \geqslant 1$	`a \ge 1`
δ	`\delta`
Δ	`\Delta`
$a \in E$	`a \in E`
$A \subset E$	`A \subset E`
$P \implies Q$	`P \implies Q`
$P \iff Q$	`P \iff Q`
$\forall$	`\forall`
$\exists$	`\exists`
$\cup$	`\cup`
$\cap$	`\cap`

36.3. Pour allez plus loin

Il est possible de créer ses propres commandes avec `\newcommand`. Par exemple avec l'instruction

`\newcommand{\Rr}{\mathbb{R}}`

vous définissez une nouvelle commande `\Rr` qui exécutera l'instruction `\mathbb{R}` et affichera donc $\mathbb{R}$.
Autre exemple, après avoir défini

`\newcommand{\monintegrale}{\int_0^1 f(t) dt}`

la commande `\monintegrale` affichera $\int_0^1 f(t) dt$.

Pour aller plus loin

Exo7

— Site Exo7 : cours, exercices corrigés : exo7.emath.fr
— Vidéos Exo7 : www.youtube.com/Exo7Math
— Livre « Algèbre » : fichier pdf, Amazon.fr (livre papier noir et blanc).
— Livre « Analyse » : fichier pdf, Amazon.fr (livre papier noir et blanc).

Autres ressources

— « Bibm@th » : www.bibmath.net
Cours et exercices niveau L1/Math Sup, L2/Math Spe, Capes.
— « Les-Mathématiques.net » les-mathematiques.net
Cours et exercices niveau L1/Math Sup, L2/Math Spe, Capes. Forum de discussions.
— « Maths-France » de J.-L. Rouget : maths-france.fr.
Cours et exercices niveau Terminale, L1/Math Sup, L2/Math Spe, Capes.
— Page de Michel Quercia : michel.quercia.free.fr
Cours et exercices niveau L1/Math Sup, L2/Math Spe.
— Site de David Delaunay : ddmaths.free.fr
Exercices corrigés.

Vulgarisation

— « Images des mathématiques » : images.math.cnrs.fr
Articles nombreux et variés sur les mathématiques d'aujourd'hui.
— Chaîne Youtube Micmaths de Mickael Launay.
Vidéos passionnantes de vulgarisation.
— Chaîne Youtube Numberphile
Vidéos de vulgarisation (en anglais).

Auteurs

Cet ouvrage de formules a été réalisé par Arnaud Bodin.
Ces formules sont principalement tirées des livres « Analyse » et « Algèbre » d'Exo7 issus d'un large travail collectif. Les contributeur des livres sont :

Arnaud Bodin
Eva Bayer-Fluckiger
Niels Borne
Marc Bourdon
Philippe Chabloz
Sophie Chemla
Guoting Chen
Gilles Costantini
Laura Desideri
Abdellah Hanani
Jean-Louis Rouget
Pascal Romon
Lara Thomas

Relectures (passées ou présentes) : Stéphanie Bodin, Vianney Combet, Barnabé Croizat, Christine Sacré. Merci à Guillaume Jouve, Kroum Tzanev pour leurs conseils.

Version 0.1 – Juin 2023