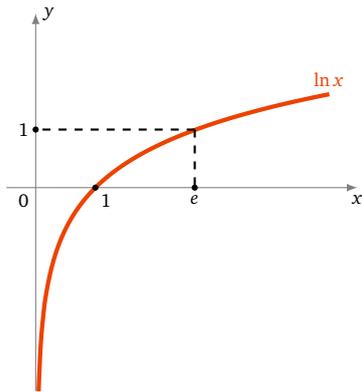


Fonctions usuelles

1. Logarithme et exponentielle

Logarithme Le **logarithme népérien** $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$.

- Proposition.** 1. $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ (pour tout $a, b > 0$),
 2. $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$,
 3. $\ln(a^n) = n \ln a$, (pour tout $n \in \mathbb{N}$)
 4. \ln est une fonction continue, strictement croissante et définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} ,
 5. $\ln'(x) = \frac{1}{x}$ pour tout $x > 0$,
 6. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$,
 7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$,
 8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$,
 9. la fonction \ln est concave et $\ln x \leq x - 1$ (pour tout $x > 0$).



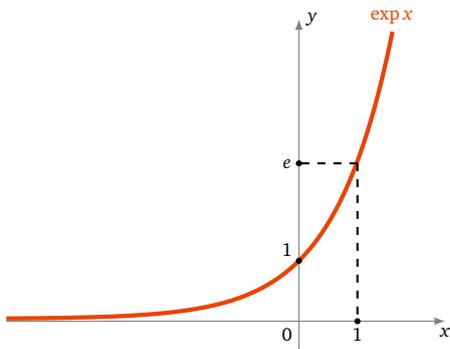
- Le **logarithme en base a** $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$. De sorte que $\log_a(a) = 1$.
- Pour $a = 10$ on obtient le **logarithme décimal** \log_{10} qui vérifie $\log_{10}(10) = 1$ (et donc $\log_{10}(10^n) = n$).

$$x = 10^y \iff y = \log_{10}(x)$$

- En informatique intervient le logarithme en base 2 : $\log_2(2^n) = n$.

Exponentielle

La fonction **exponentielle**, notée $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est la bijection réciproque de $\ln :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ on note aussi e^x pour $\exp x$.



Proposition. La fonction exponentielle vérifie les propriétés suivantes :

- $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$
- $\exp(nx) = (\exp x)^n$
- $\exp : \mathbb{R} \rightarrow]0, +\infty[$ est une fonction continue, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} \exp x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \exp x = +\infty$.
- $\exp(1) = e \approx 2,718 \dots$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\exp x}{x} = +\infty$,
- La fonction exponentielle est dérivable et $\exp' x = \exp x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Elle est convexe et $\exp x \geq 1 + x$.

Lien logarithme/exponentielle :

$$\exp(\ln x) = x \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } \ln(\exp x) = x \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$:

$$y = \exp(x) \iff x = \ln(y)$$

Puissance

Par définition, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$a^b = \exp(b \ln a)$$

Remarque.

- $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}} = \exp\left(\frac{1}{2} \ln a\right)$
- $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}} = \exp\left(\frac{1}{n} \ln a\right)$ (la **racine n-ième** de a)
- Les fonctions $x \mapsto a^x$ s'appellent aussi des fonctions exponentielles et se ramènent systématiquement à la fonction exponentielle classique par l'égalité $a^x = \exp(x \ln a)$. Il ne faut surtout pas les confondre avec les fonctions puissances $x \mapsto x^a$.

Soit $x, y > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$.

$$x^{a+b} = x^a x^b \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a} \quad (xy)^a = x^a y^a \quad (x^a)^b = x^{ab}$$

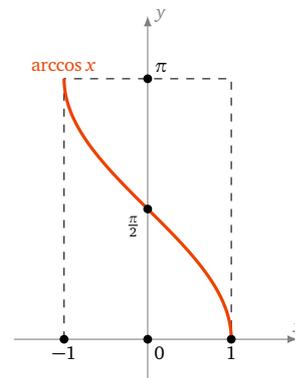
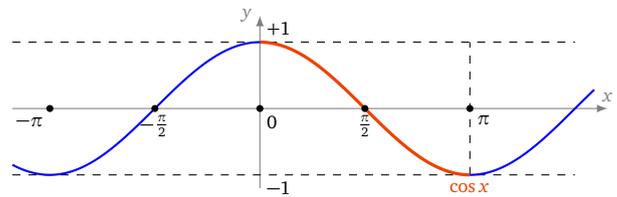
$$\ln(x^a) = a \ln x$$

2. Fonctions circulaires inverses

Arccosinus

La restriction $\cos|_{[0, \pi]} : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arccosinus** :

$$\arccos : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



$$\cos(\arccos(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$$

$$\arccos(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$$

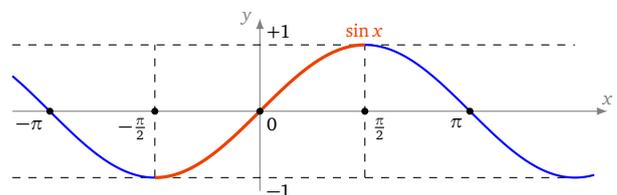
$$\text{Si } x \in [0, \pi] \quad \cos(x) = y \iff x = \arccos y$$

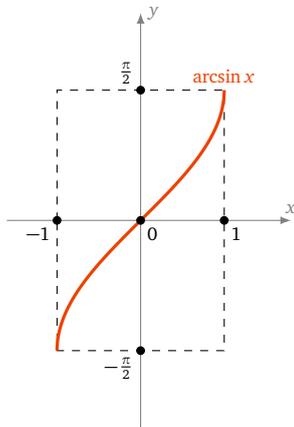
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Arcsinus

La restriction $\sin|_{[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow [-1, 1]$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arcsinus** :

$$\arcsin : [-1, 1] \rightarrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$





$$\begin{aligned} \sin(\arcsin(x)) &= x \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arcsin(\sin(x)) &= x \quad \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \end{aligned}$$

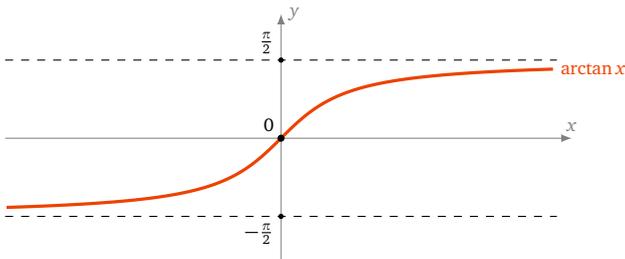
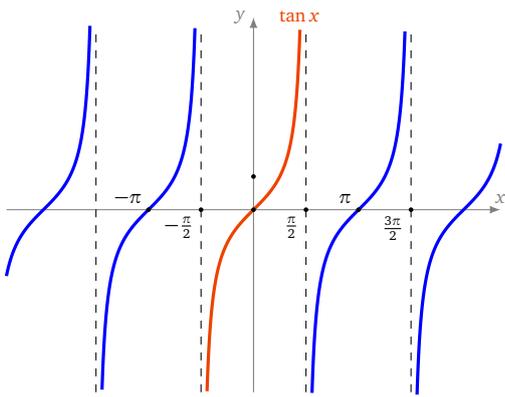
$$\text{Si } x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \quad \sin(x) = y \iff x = \arcsin y$$

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1, 1[$$

Arctangente

La restriction $\tan|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[} :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction **arctangente** :

$$\arctan : \mathbb{R} \rightarrow]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$$



$$\begin{aligned} \tan(\arctan(x)) &= x \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \arctan(\tan(x)) &= x \quad \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{aligned}$$

$$\text{Si } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\quad \tan(x) = y \iff x = \arctan y$$

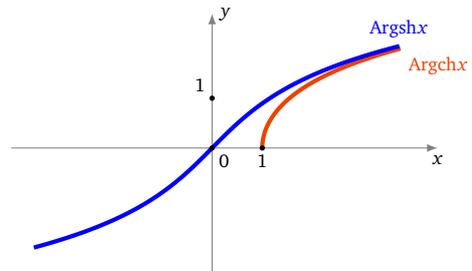
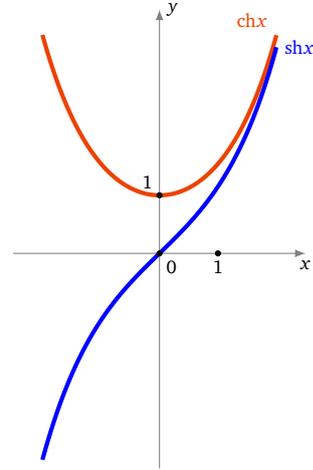
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

3. Fonctions hyperboliques et hyperboliques inverses

Pour $x \in \mathbb{R}$, le **cosinus hyperbolique** est :

$$\text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La restriction $\text{ch}|_{[0, +\infty[} : [0, +\infty[\rightarrow [1, +\infty[$ est une bijection. Sa bijection réciproque est $\text{Argch} : [1, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.



Pour $x \in \mathbb{R}$, le **sinus hyperbolique** est :

$$\text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$\text{sh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, dérivable, strictement croissante vérifiant $\lim_{x \rightarrow -\infty} \text{sh } x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sh } x = +\infty$, c'est donc une bijection. Sa bijection réciproque est $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposition.

- $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$
- $\text{ch}' x = \text{sh } x$, $\text{sh}' x = \text{ch } x$
- $\text{Argsh} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est strictement croissante et continue.
- Argsh est dérivable et $\text{Argsh}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.
- $\text{Argsh } x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Par définition la **tangente hyperbolique** est :

$$\text{th } x = \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x}$$

La fonction $\text{th} : \mathbb{R} \rightarrow]-1, 1[$ est une bijection, on note $\text{Argth} :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ sa bijection réciproque.