

Les suites

1. Premières définitions

Une **suite** est une application $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u(n)$ par u_n et on l'appelle n -ème **terme** ou **terme général** de la suite.

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq M$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **minorée** si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \geq m$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **bornée** si elle est majorée et minorée, ce qui revient à dire : $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad |u_n| \leq M$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \geq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement croissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} > u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} \leq u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **strictement décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} < u_n$.
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Remarque.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$.
- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $u_n > 0$ est croissante si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$.

Définition. — La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ a pour **limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - \ell| \leq \varepsilon$:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies |u_n - \ell| \leq \varepsilon)$$

- La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **tend vers $+\infty$** si :

$$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N \implies u_n \geq A)$$
- Une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **convergente** si elle admet une limite **finie**. Elle est **divergente** sinon (c'est-à-dire soit la suite tend vers $\pm\infty$, soit elle n'admet pas de limite).

Proposition. Si une suite est convergente, sa limite est unique.

Proposition. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - \ell) = 0 \iff \lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - \ell| = 0$,

Proposition (Opérations sur les limites). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes.

1. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, où $\ell \in \mathbb{R}$, alors pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda u_n = \lambda \ell$.
2. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell'$, où $\ell, \ell' \in \mathbb{R}$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = \ell + \ell' \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = \ell \times \ell'$$
3. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ où $\ell \in \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ alors $u_n \neq 0$ pour n assez grand et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\ell}$.

Proposition (Opérations sur les limites infinies). Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{v_n} = 0$
2. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
3. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par un nombre $\lambda > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n \times v_n) = +\infty$.
4. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ et $u_n > 0$ pour n assez grand alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} = +\infty$.

Proposition.

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$. Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$$

2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites telles que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq u_n$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
3. Théorème des « gendarmes » : si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont trois suites telles que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n \leq v_n \leq w_n$$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$, alors la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$.

2. Exemples remarquables

Suite géométrique

Proposition (Suite géométrique). On fixe un réel a . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de terme général : $u_n = a^n$.

1. Si $a = 1$, on a pour tout $n \in \mathbb{N} : u_n = 1$.
2. Si $a > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
3. Si $-1 < a < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
4. Si $a \leq -1$, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Série géométrique

Proposition (Série géométrique). Soit a un réel, $a \neq 1$. En notant $\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + \dots + a^n$, on a :

$$\sum_{k=0}^n a^k = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Si $a \in]-1, 1[$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite de terme général : $u_n = \sum_{k=0}^n a^k$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{1-a}$. Ces formules sont aussi valables si $a \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Si $a = 1$, alors $1 + a + a^2 + \dots + a^n = n + 1$.

Théorème. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls. On suppose qu'il existe un réel ℓ tel que pour tout entier naturel n (ou seulement à partir d'un certain rang) on ait : $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \ell < 1$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

Corollaire. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels non nuls.

$$\text{Si } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 0, \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Exemple. Soit $a \in \mathbb{R}$. Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

3. Théorèmes de convergence

Proposition. Toute suite convergente est bornée.

Théorème.

$$\text{Toute suite croissante et majorée est convergente.}$$

Remarque. Et aussi :

- Toute suite décroissante et minorée est convergente.
- Une suite croissante et qui n'est pas majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante et qui n'est pas minorée tend vers $-\infty$.

Définition. Les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont dites **adjacentes** si

1. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante,
2. pour tout $n \geq 0$, on a $u_n \leq v_n$,
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$.

Théorème.

$$\text{Si les suites } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ et } (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ sont adjacentes, elles convergent vers la même limite.}$$

Les termes de la suite sont ordonnés ainsi :

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq \dots \leq v_n \leq \dots \leq v_2 \leq v_1 \leq v_0$$

Définition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Une **suite extraite** ou **sous-suite** de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Proposition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, alors pour toute suite extraite $(u_{\phi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\phi(n)} = \ell$.

Corollaire. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Si elle admet une sous-suite divergente, ou bien si elle admet deux sous-suites convergeant vers des limites distinctes, alors elle diverge.

Exemple. La suite de terme $u_n = (-1)^n$ diverge.

Théorème (Théorème de Bolzano-Weierstrass). Toute suite bornée admet une sous-suite convergente.

4. Suites récurrentes

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Une **suite récurrente** est :

$$u_0 \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n) \quad \text{pour } n \geq 0.$$

Proposition. Si f est une fonction continue et la suite récurrente (u_n) converge vers ℓ , alors ℓ est une solution de l'équation :

$$f(\ell) = \ell$$

Proposition (Cas d'une fonction croissante). Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et **croissante**, alors quel que soit $u_0 \in [a, b]$, la suite récurrente (u_n) est monotone et converge vers $\ell \in [a, b]$ vérifiant $f(\ell) = \ell$.

Pour appliquer cette proposition, il faut vérifier que $f([a, b]) \subset [a, b]$.

Proposition (Cas d'une fonction décroissante). Soit $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ une fonction continue et **décroissante**. Soit $u_0 \in [a, b]$ et la suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. Alors :

- La sous-suite (u_{2n}) converge vers une limite ℓ vérifiant $f \circ f(\ell) = \ell$.
- La sous-suite (u_{2n+1}) converge vers une limite ℓ' vérifiant $f \circ f(\ell') = \ell'$.