Les nombres réels

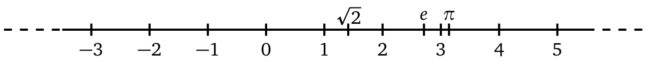
1. L'ensemble des nombres rationnels $\mathbb{Q}$

L'ensemble des ***nombres rationnels*** est $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^* \right\}$.

Proposition. *Un nombre est rationnel si et seulement s'il admet une écriture décimale périodique ou finie.*

Proposition. *$\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel :* $\boxed{\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}}$

La démonstration classique par l'absurde est à connaître !
On représente les nombres réels sur la « droite numérique » :



$\sqrt{2} \simeq 1,4142\ldots \quad \pi \simeq 3,14159265\ldots \quad e \simeq 2,718\ldots$
La droite numérique « achevée » est : $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$

2. Propriétés de $\mathbb{R}$

Proposition (addition et multiplication)**.** $(\mathbb{R}, +, \times)$ *est un* **corps commutatif***. C'est-à-dire, pour $a, b, c \in \mathbb{R}$ on a :*

$$\begin{array}{ll} a+b=b+a & a \times b = b \times a \\ 0+a=a & 1 \times a = a \text{ si } a \neq 0 \\ a+b=0 \iff a=-b & ab=1 \iff a=\frac{1}{b} \\ (a+b)+c=a+(b+c) & (a \times b) \times c = a \times (b \times c) \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a \times (b+c) = a \times b + a \times c \\ a \times b = 0 \iff (a=0 \text{ ou } b=0) \end{array}$$

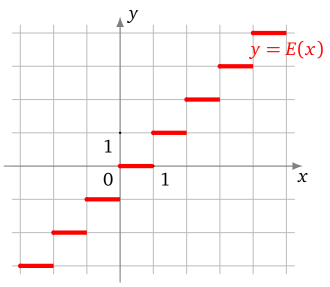
Proposition (Ordre)**.** *La relation $\leqslant$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre, et de plus, elle est totale. Nous avons donc :*

— *pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x \leqslant x$ (***réflexive***),*
— *pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, si $x \leqslant y$ et $y \leqslant x$ alors $x = y$ (***antisymétrique***),*
— *pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$ si $x \leqslant y$ et $y \leqslant z$ alors $x \leqslant z$ (***transitive***),*
— *pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leqslant y$ ou $y \leqslant x$ (***totale***).*

Proposition (Propriété d'Archimède)**.** *$\mathbb{R}$ est* **archimédien***, c'est-à-dire : Pour tout réel x, il existe un entier naturel n strictement plus grand que x.*

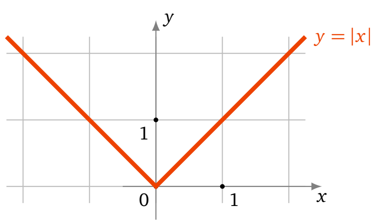
Proposition. *Soit $x \in \mathbb{R}$, il* **existe** *un* **unique** *entier relatif, la* **partie entière** *notée $E(x)$, tel que :*

$$\boxed{E(x) \leqslant x < E(x)+1}$$



Pour un nombre réel x, on définit la ***valeur absolue*** de x par :

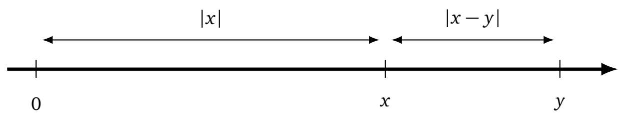
$$\boxed{|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}}$$



Proposition.

1. $|x| \geqslant 0$; $\quad |-x| = |x|$; $\quad |x| > 0 \iff x \neq 0$
2. $\sqrt{x^2} = |x|$
3. $|xy| = |x||y|$
4. **Inégalité triangulaire** $\boxed{|x+y| \leqslant |x|+|y|}$
5. **Seconde inégalité triangulaire** $\big||x|-|y|\big| \leqslant |x-y|$

Sur la droite numérique, $|x-y|$ représente la distance entre les réels x et y ; en particulier $|x|$ représente la distance entre les réels x et 0.



De plus $|x-a| < r \iff x \in]a-r, a+r[$.

3. Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$

Définition. Soit a un réel, $V \subset \mathbb{R}$ un sous-ensemble. On dit que V est un ***voisinage*** de a s'il existe un intervalle ouvert I tel que $a \in I$ et $I \subset V$.

Théorème.

1. *$\mathbb{Q}$ est* **dense** *dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité de rationnels.*
2. *$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: tout intervalle ouvert (non vide) de $\mathbb{R}$ contient une infinité d'irrationnels.*

4. Borne supérieure

Maximum, minimum

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel α est un ***plus grand élément*** (ou ***maximum***) de A si :

$$\alpha \in A \quad \text{et} \quad \forall x \in A \ x \leqslant \alpha.$$

S'il existe, le plus grand élément est unique, on le note alors $\max A$.
Le ***plus petit élément*** de A, (ou ***minimum***) noté $\min A$, s'il existe est le réel α tel que $\alpha \in A$ et $\forall x \in A \ x \geqslant \alpha$.

Le plus grand élément ou le plus petit élément n'existent pas toujours.

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Un réel M est un ***majorant*** de A si $\forall x \in A \ x \leqslant M$.
Un réel m est un ***minorant*** de A si $\forall x \in A \ x \geqslant m$.

Si un majorant (resp. un minorant) de A existe on dit que A est ***majorée*** (resp. ***minorée***).

Définition. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et α un réel.

— α est la ***borne supérieure*** de A si α est un majorant de A et si c'est le plus petit des majorants. S'il existe on le note $\sup A$.
— α est la ***borne inférieure*** de A si α est un minorant de A et si c'est le plus grand des minorants. S'il existe on le note $\inf A$.

Théorème ($\mathbb{R}$4)**.** *Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure.*

De la même façon : Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure.

Proposition (Caractérisation de la borne supérieure)**.** *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que*

(i) *si $x \in A$, alors $x \leqslant \sup A$,*
(ii) *pour tout $y < \sup A$, il existe $x \in A$ tel que $y < x$.*

Caractérisation très utile de la borne supérieure.

Proposition. *Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. La borne supérieure de A est l'unique réel $\sup A$ tel que*

(i) *$\sup A$ est un majorant de A,*
(ii) *il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A qui converge vers $\sup A$.*