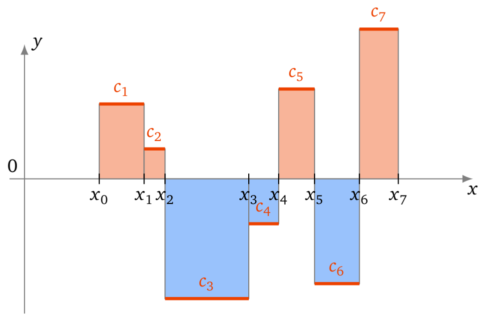
Intégrales

1. L'intégrale de Riemann

Fonction en escalier
Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une ***fonction en escalier*** s'il existe une subdivision $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ et des nombres réels $c_1, \dots, c_n$ tels que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on ait $\forall x \in]x_{i-1}, x_i[\quad f(x) = c_i$.
Autrement dit f est une fonction constante sur chacun des sous-intervalles de la subdivision.
L'intégrale d'une fonction en escalier est :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} c_i(x_i - x_{i-1})$$

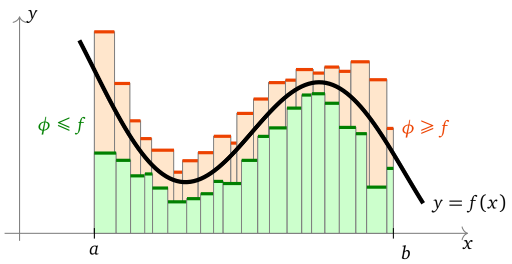


Chaque terme $c_i(x_i - x_{i-1})$ est l'aire algébrique du rectangle compris entre les abscisses x_{i-1} et x_i et de hauteur c_i.
Fonction intégrable
Notation : $f \leqslant g$ signifie $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in [a,b]$.

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ bornée. On définit :

$$I^-(f) = \sup \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \leqslant f \right\}$$

$$I^+(f) = \inf \left\{ \int_a^b \phi(x)\,dx \mid \phi \text{ en escalier et } \phi \geqslant f \right\}$$



On a $I^-(f) \leqslant I^+(f)$.
Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite ***intégrable*** (***au sens de Riemann***) si $I^-(f) = I^+(f)$. On note alors ce nombre $\int_a^b f(x)\,dx$.

Théorème. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue alors f est intégrable.*

Et aussi :
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue par morceaux alors f est intégrable.
- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est monotone alors f est intégrable.

2. Propriétés

Les fonctions sont supposées intégrables.

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \text{et pour } a < b \quad \int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Relation de Chasles
Pour a, b, c quelconques :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx}$$

Positivité de l'intégrale

Proposition.

L'intégrale d'une fonction positive est positive :

$$\boxed{\text{Si} \quad f \geqslant 0 \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0}$$

Variante :

$$\text{Si } f \leqslant g \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Linéarité de l'intégrale
Pour tous réels λ, μ

$$\int_a^b \big(\lambda f(x) + \mu g(x)\big)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx + \mu \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\boxed{\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

3. Primitive

Définition. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle. $F : I \to \mathbb{R}$ est une ***primitive*** de f si F est une fonction dérivable sur I vérifiant $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.
Trouver une primitive est donc l'opération inverse de calculer la fonction dérivée. Trouver une primitive permet de les trouver toutes.

Proposition. *Si $F : I \to \mathbb{R}$ est une primitive de f, alors toute primitive de f s'écrit $G = F + c$ où $c \in \mathbb{R}$.*

Primitives des fonctions usuelles

$$\int e^x\,dx = e^x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \quad \text{sur }]0, +\infty[\text{ ou }]-\infty, 0[$$

$$\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + c, \int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + c \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + c \\ \frac{\pi}{2} - \arccos x + c \end{cases} \quad \text{sur }]-1, 1[$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \begin{cases} \operatorname{Argsh} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \begin{cases} \operatorname{Argch} x + c \\ \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) + c \end{cases} \quad \text{sur }]1, +\infty[$$

Relation primitive-intégrale

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. La fonction $F : I \to \mathbb{R}$ définie par*

$$\boxed{F(x) = \int_a^x f(t)\,dt}$$

est une primitive de f, c'est-à-dire F est dérivable et $F'(x) = f(x)$. Par conséquent pour une primitive F quelconque de f :

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)}$$

Notation. $\big[F(x)\big]_a^b = F(b) - F(a)$. Si l'on omet les bornes alors $\big[F\big]$ désigne la fonction $F + c$ où c est une constante quelconque.
Remarques :
1. $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ est même ***l'unique primitive de f qui s'annule en a.***
2. En particulier si F est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ alors $\boxed{\int_a^b F'(t)\,dt = F(b) - F(a)}$.

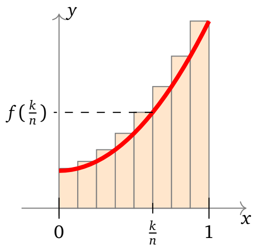
Sommes de Riemann

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable, alors*

$$\boxed{S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(a+k\frac{b-a}{n}\Big) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_a^b f(x)\,dx}$$

Cas particulier $a=0$, $b=1$, $\frac{b-a}{n}=\frac{1}{n}$ et $f\big(a+k\frac{b-a}{n}\big)=f\big(\frac{k}{n}\big)$:

$$S_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\Big(\frac{k}{n}\Big) \quad \xrightarrow[n\to+\infty]{} \quad \int_0^1 f(x)\,dx$$



4. Intégration par parties - Changement de variable

Intégration par parties

Théorème. *Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle $[a,b]$.*

$$\boxed{\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = \big[uv\big]_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx}$$

Pour les primitives :

$$\int u(x)v'(x)\,dx = \big[uv\big] - \int u'(x)v(x)\,dx$$

Changement de variable

Théorème. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $\varphi : J \to I$ une bijection de classe $\mathscr{C}^1$. Pour tout $a,b\in J$*

$$\boxed{\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f\big(\varphi(t)\big)\cdot\varphi'(t)\,dt}$$

Si F est une primitive de f alors $F\circ\varphi$ est une primitive de $\big(f\circ\varphi\big)\cdot\varphi'$.

Méthodologie.

— Trouver le bon changement de variable $u=\varphi(x)$.

— Effectuer le changement de l'élément différentiel $du=\varphi'(x)\,dx$.

— Effectuer le changement de bornes : comme x varie de ... à ... alors u varie de ... à ...

— Appliquer la formule de changement de variable.

Exemple. Calcul de $\int_0^{1/2}\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}}\,dx$.

Soit le changement de variable $u=\varphi(x)=1-x^2$. Alors $du=\varphi'(x)\,dx=-2x\,dx$. Pour $x=0$ on a $u=\varphi(0)=1$ et pour $x=\frac{1}{2}$ on a $u=\varphi(\frac{1}{2})=\frac{3}{4}$. Comme $\varphi'(x)=-2x$, φ est une bijection de $[0,\frac{1}{2}]$ sur $[1,\frac{3}{4}]$. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2}\frac{x\,dx}{(1-x^2)^{3/2}} &= \int_1^{3/4}\frac{\frac{-du}{2}}{u^{3/2}} = -\frac{1}{2}\int_1^{3/4}u^{-3/2}\,du \\ &= -\frac{1}{2}\big[-2u^{-1/2}\big]_1^{3/4} = \frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}-1 = \frac{2}{\sqrt{3}}-1.\end{aligned}$$

5. Intégration des fractions rationnelles

Trois situations de base

On souhaite intégrer $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$.

Premier cas. Le dénominateur ax^2+bx+c possède deux racines réelles distinctes $x_1,x_2\in\mathbb{R}$.

Écrire $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_1)(x-x_2)}=\frac{A}{x-x_1}+\frac{B}{x-x_2}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Alors

$$\int f(x)\,dx = A\ln|x-x_1| + B\ln|x-x_2| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,x_1[$, $]x_1,x_2[$, $]x_2,+\infty[$ (si $x_1<x_2$).

Deuxième cas. Le dénominateur ax^2+bx+c possède une racine double $x_0\in\mathbb{R}$.

Alors $f(x)=\frac{\alpha x+\beta}{a(x-x_0)^2}=\frac{A}{(x-x_0)^2}+\frac{B}{x-x_0}$ avec $A,B\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Alors

$$\int f(x)\,dx = -\frac{A}{x-x_0} + B\ln|x-x_0| + c$$

sur chacun des intervalles $]-\infty,x_0[$, $]x_0,+\infty[$.

Troisième cas. Le dénominateur $u=ax^2+bx+c$ ne possède pas de racine réelle.

1. Faire apparaître une fraction du type $\frac{u'}{u}$ (que l'on sait intégrer en $\ln|u|$).
2. Il reste une partie du type $\frac{1}{u}$ qui par un changement de variable se ramène à une expression $\frac{1}{v^2+1}$ dont une primitive est $\arctan v$.

Intégration des éléments simples

Une fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit comme somme d'un polynôme $E(x)\in\mathbb{R}[x]$ (la partie entière) et d'éléments simples d'une des formes suivantes :

$$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k} \quad \text{ou} \quad \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} \quad \text{avec } b^2-4ac<0$$

1. On sait intégrer le polynôme $E(x)$.
2. Intégration de l'élément simple $\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$.
   (a) Si $k=1$ alors $\int\frac{\gamma\,dx}{x-x_0}=\gamma\ln|x-x_0|+c_0$.
   (b) Si $k\geqslant 2$ alors $\int\frac{\gamma\,dx}{(x-x_0)^k}=\gamma\int(x-x_0)^{-k}\,dx=\frac{\gamma}{-k+1}(x-x_0)^{-k+1}+c_0$.
3. Intégration de l'élément simple $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$. On écrit cette fraction sous la forme

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

   (a) Si $k=1$, calcul de $\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\ln|u(x)|+c_0=\ln|ax^2+bx+c|+c_0$.
   (b) Si $k\geqslant 2$, calcul de $\int\frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx=\int\frac{u'(x)}{u(x)^k}\,dx=\frac{1}{-k+1}u(x)^{-k+1}+c_0=\frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1}+c_0$.
   (c) Si $k=1$, calcul de $\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx$. Par un changement de variable $u=px+q$ on se ramène à calculer une primitive du type $\int\frac{du}{u^2+1}=\arctan u+c_0$.
   (d) Si $k\geqslant 2$, calcul de $\int\frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}\,dx$. On effectue le changement de variable $u=px+q$ pour se ramener au calcul de $I_k=\int\frac{du}{(u^2+1)^k}$. Une intégration par parties permet de passer de I_k à I_{k-1}.

Intégration des fonctions trigonométriques

Les règles de Bioche. On note $\omega(x)=f(x)\,dx$. On a alors $\omega(-x)=f(-x)\,d(-x)=-f(-x)\,dx$ et $\omega(\pi-x)=f(\pi-x)\,d(\pi-x)=-f(\pi-x)\,dx$.

— Si $\omega(-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\cos x$.

— Si $\omega(\pi-x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\sin x$.

— Si $\omega(\pi+x)=\omega(x)$ alors on effectue le changement de variable $u=\tan x$.

Le changement de variable $t=\tan\frac{x}{2}$.

Les formules de la « tangente de l'arc moitié » permettent d'exprimer sinus, cosinus et tangente en fonction de $\tan\frac{x}{2}$.

$$\boxed{\begin{gathered}\text{Avec} \quad t=\tan\frac{x}{2} \quad \text{on a} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \qquad \tan x=\frac{2t}{1-t^2} \\ \text{et} \qquad dx=\frac{2\,dt}{1+t^2}.\end{gathered}}$$