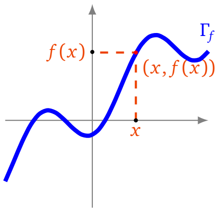
Limites et fonctions continues

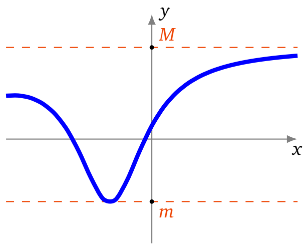
1. Notions de fonction

Une ***fonction*** est une application $f : U \to \mathbb{R}$, où U est une partie de $\mathbb{R}$ appelé ***domaine de définition***.
Le ***graphe*** d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est la partie Γ_f de $\mathbb{R}^2$ définie par $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in U\}$.



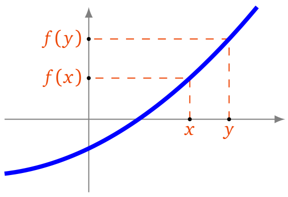
- f est ***majorée*** sur U si $\exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \; f(x) \leqslant M$;
- f est ***minorée*** sur U si $\exists m \in \mathbb{R} \quad \forall x \in U \; f(x) \geqslant m$;
- f est ***bornée*** sur U si f est à la fois majorée et minorée sur U, c'est-à-dire si $\exists M \in \mathbb{R} \; \forall x \in U \quad |f(x)| \leqslant M$.

Voici le graphe d'une fonction bornée (minorée par m et majorée par M).



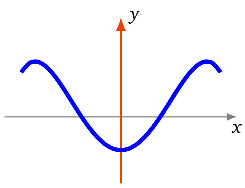
- f est ***croissante*** sur U si $\boxed{\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \leqslant f(y)}$
- f est ***strictement croissante*** si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) < f(y)$
- f est ***décroissante*** si $\forall x, y \in U \quad x \leqslant y \implies f(x) \geqslant f(y)$
- f est ***strictement décroissante*** si $\forall x, y \in U \quad x < y \implies f(x) > f(y)$
- f est ***monotone*** sur U si f est croissante ou décroissante sur U.

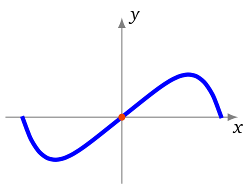
Un exemple de fonction croissante (et même strictement croissante) :



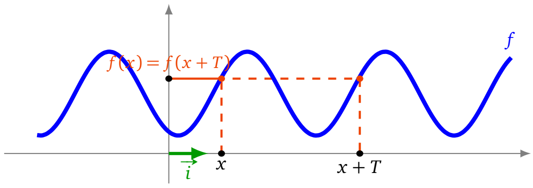
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I symétrique par rapport à 0.

- f est ***paire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = f(x)$,
- f est ***impaire*** si $\forall x \in I \quad f(-x) = -f(x)$.
- f est paire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (figure de gauche).
- f est impaire si et seulement si son graphe est symétrique par rapport à l'origine (figure de droite).





Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ est paire. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^{2n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ est impaire.
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction et T un nombre réel, $T > 0$. La fonction f est ***périodique*** de période T si $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x + T) = f(x)$.



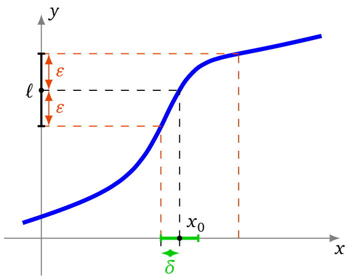
Exemples. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques. La fonction tangente est π-périodique.

2. Limites

Limite en un point
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ un point de I ou une extrémité de I.

Définition. Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en x_0*** si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$



- L'inégalité $|x - x_0| < \delta$ équivaut à $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. L'inégalité $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ équivaut à $f(x) \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$.
- L'ordre des quantificateurs est important, on ne peut pas échanger le $\forall \varepsilon$ avec le $\exists \delta$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble de la forme $]a, x_0[\cup]x_0, b[$.

Définition. On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en x_0*** si

$$\forall A > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

Limite en l'infini
Soit $f : I \to \mathbb{R}$ définie sur un intervalle de la forme $I =]a, +\infty[$.

Définition.

- Soit $\ell \in \mathbb{R}$. On dit que ***f a pour limite ℓ en $+\infty$*** si
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$$
- On dit que ***f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$*** si
$$\forall A > 0 \quad \exists B > 0 \quad \forall x \in I \quad x > B \implies f(x) > A$$

Proposition.

$$\boxed{\textit{Si une fonction admet une limite, alors cette limite est unique.}}$$

Soient deux fonctions f et g et $x_0 \in \mathbb{R}$ ou $x_0 = \pm\infty$.

Proposition. *Si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors :*

- $\lim_{x_0} (\lambda \cdot f) = \lambda \cdot \ell$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x_0} (f + g) = \ell + \ell'$
- $\lim_{x_0} (f \times g) = \ell \times \ell'$
- *si* $\ell \neq 0$, *alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = \frac{1}{\ell}$

De plus, si $\lim_{x_0} f = +\infty$ *(ou* $-\infty$*) alors* $\lim_{x_0} \frac{1}{f} = 0$.

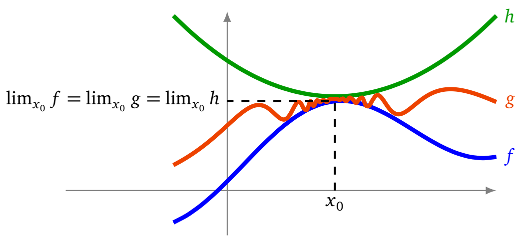
Proposition. *Si* $\lim_{x_0} f = \ell$ *et* $\lim_{\ell} g = \ell'$, *alors* $\lim_{x_0} g \circ f = \ell'$.

Formes indéterminées : $+\infty - \infty$; $0 \times \infty$; $\frac{\infty}{\infty}$; $\frac{0}{0}$; 1^∞ ; ∞^0.

Proposition.

- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim_{x_0} f = \ell \in \mathbb{R}$ *et* $\lim_{x_0} g = \ell' \in \mathbb{R}$, *alors* $\ell \leqslant \ell'$.
- *Si* $f \leqslant g$ *et si* $\lim_{x_0} f = +\infty$, *alors* $\lim_{x_0} g = +\infty$.
- *Théorème des gendarmes*

$$\boxed{\textit{Si } f \leqslant g \leqslant h \textit{ et si } \lim_{x_0} f = \lim_{x_0} h = \ell \in \mathbb{R}, \textit{ alors } g \textit{ a une limite en } x_0 \textit{ et } \lim_{x_0} g = \ell.}$$



3. Continuité en un point

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.

— f est ***continue en un point*** $x_0 \in I$ si

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in I \quad |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon}$$

c'est-à-dire si f admet une limite en x_0 (cette limite vaut alors nécessairement $f(x_0)$).

— f est ***continue sur*** I si f est continue en tout point de I.

Proposition. *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ continues en un point $x_0 \in I$. Alors*

— *$\lambda \cdot f$ est continue en x_0 (pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$),*

— *$f + g$ est continue en x_0,*

— *$f \times g$ est continue en x_0,*

— *si $f(x_0) \neq 0$, alors $\frac{1}{f}$ est continue en x_0.*

Proposition. *Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ avec $f(I) \subset J$. Si f est continue en un point $x_0 \in I$ et si g est continue en $f(x_0)$, alors $g \circ f$ est continue en x_0.*

Prolongement par continuité

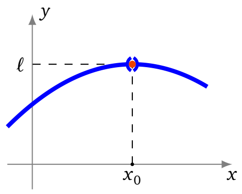
Soit I un intervalle, x_0 un point de I et $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$ une fonction.

— On dit que f est ***prolongeable par continuité*** en x_0 si f admet une limite finie en x_0. Notons alors $\ell = \lim_{x_0} f$.

— On définit alors la fonction $\tilde{f} : I \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $x \in I$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq x_0 \\ \ell & \text{si } x = x_0. \end{cases}$$

Alors $\tilde{f}$ est continue en x_0 et on l'appelle le ***prolongement par continuité*** de f en x_0.



Suites et continuité

Proposition. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction et x_0 un point de I. Alors :*

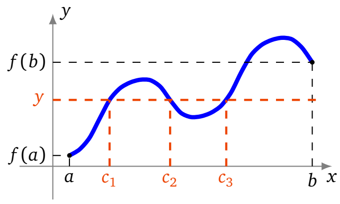
$$\boxed{f \text{ est continue en } x_0 \iff \begin{array}{c}\text{pour toute suite } (u_n) \text{ qui converge vers } x_0 \\ \text{la suite } (f(u_n)) \text{ converge vers } f(x_0)\end{array}}$$

En particulier : si f est continue sur I et si (u_n) est une suite convergente de limite ℓ, alors $(f(u_n))$ converge vers $f(\ell)$. On l'utilise pour l'étude des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$: si f est continue et $u_n \to \ell$, alors $f(\ell) = \ell$.

4. Continuité sur un intervalle

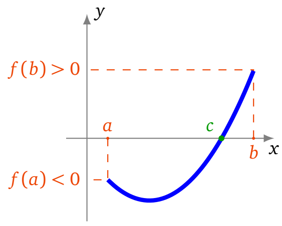
Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Pour tout réel } y \text{ compris entre } f(a) \text{ et } f(b), \\ \text{il existe } c \in [a,b] \text{ tel que } f(c) = y.\end{array}}$$



Corollaire. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment.*

$$\boxed{\text{Si } f(a) \cdot f(b) < 0, \text{ alors il existe } c \in \,]a,b[\text{ tel que } f(c) = 0.}$$



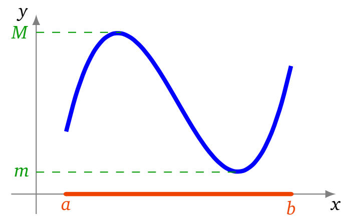
Exemple. Tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Corollaire.

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Attention ! Il serait faux de croire que l'image par une fonction f de l'intervalle $[a,b]$ soit l'intervalle $[f(a), f(b)]$.

Théorème (Fonctions continues sur un segment)**.** *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur un segment. Alors il existe deux réels m et M tels que $f([a,b]) = [m,M]$. Autrement dit, l'image d'un segment par une fonction continue est un segment.*



Si f est continue sur $[a,b]$ alors f est bornée sur $[a,b]$, et elle atteint ses bornes.

5. Fonctions monotones et bijections

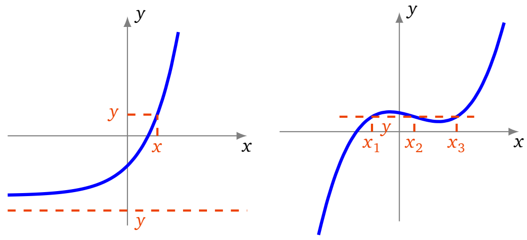
Soit $f : E \to F$ une fonction, où E et F sont des parties de $\mathbb{R}$.

— f est ***injective*** si $\forall x, x' \in E \ \ f(x) = f(x') \implies x = x'$;

— f est ***surjective*** si $\forall y \in F \ \ \exists x \in E \ \ y = f(x)$;

— f est ***bijective*** si f est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire si $\forall y \in F \ \ \exists! x \in E \ \ y = f(x)$.

Graphe d'une fonction injective (à gauche), surjective (à droite).



Proposition. *Si $f : E \to F$ est une fonction bijective alors il existe une unique application $g : F \to E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$. La fonction g est la* **bijection réciproque** *de f et se note f^{-1}.*

— On rappelle que l'***identité***, $\mathrm{id}_E : E \to E$ est définie par $x \mapsto x$.

— $g \circ f = \mathrm{id}_E$ se reformule ainsi : $\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x$.

— Alors que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ s'écrit : $\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y$.

— Dans un repère orthonormé les graphes des fonctions f et f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite $(y = x)$.

Théorème (Théorème de la bijection)**.** *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si f est continue et strictement monotone sur I, alors*

1. *f établit une bijection de l'intervalle I dans l'intervalle image $J = f(I)$,*
2. *la fonction réciproque $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone sur J et elle a le même sens de variation que f.*