Équations différentielles

1. Définitions

- Une *équation différentielle* d'ordre n est une équation de la forme
$$F\left(x, y, y', \dots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad (E_{\text{diff}})$$
où F est une fonction de $(n+2)$ variables.
- Une *solution* d'une telle équation sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est une fonction $y : I \to \mathbb{R}$ qui est n fois dérivable et qui vérifie l'équation (E_{diff}). Si on change d'intervalle, on peut très bien obtenir d'autres solutions.
- *Exemple.* Une équation différentielle *à variables séparées* est une équation du type $y' = g(x)/f(y)$ ou $y'f(y) = g(x)$. Une telle équation se résout par calcul de primitives de part et d'autre de l'égalité $y'f(y) = g(x)$.
- Une équation différentielle *linéaire* est de la forme
$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = g(x) \qquad (E)$$
où les a_i et g sont des fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.
- Une équation différentielle linéaire est *homogène*, ou *sans second membre*, si la fonction g est nulle :
$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \cdots + a_n(x)y^{(n)} = 0 \qquad (E_h)$$
- Une équation différentielle linéaire est *à coefficients constants* si les fonctions a_i ci-dessus sont constantes :
$$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^{(n)} = g(x)$$
où les a_i sont des constantes réelles et g une fonction continue.

Proposition (Principe de linéarité). *Si y_1 et y_2 sont solutions de l'équation différentielle linéaire homogène (E_h) alors, quels que soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda y_1 + \mu y_2$ est aussi solution de cette équation.*

Méthode pour résoudre une équation différentielle linéaire (E) avec second membre ;

1. Trouver une solution particulière y_p de l'équation (E).
2. Trouver l'ensemble $\mathscr{S}_h$ des solutions y_h de l'équation homogène associée (E_h).
3. Conclure par le principe de linéarité : les solutions de (E) sont les
$$y = y_p + y_h \qquad \text{avec} \qquad y_h \in \mathscr{S}_h.$$

2. Équation différentielle linéaire du premier ordre

Une équation différentielle *linéaire du premier ordre* est une équation du type $y' = a(x)y + b(x)$ où a et b sont des fonctions définies sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$.

Théorème ($y' = ay$). *Les solutions de $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ est une constante sont les fonctions y définies sur $\mathbb{R}$ par :*
$$\boxed{y(x) = ke^{ax}}$$
où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Preuve rapide : on intègre à gauche et à droite l'équation $\frac{y'}{y} = a$ pour trouver : $\ln|y(x)| = ax + b$. Donc $|y(x)| = e^{ax+b}$. Ainsi $y(x) = \pm e^b e^{ax}$.
Exemple : $3y' - 5y = 0$ a pour solution $y(x) = ke^{\frac{5}{3}x}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème ($y' = a(x)y$). *Soit $a : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $A : I \to \mathbb{R}$ une primitive de a. Les solutions de $y' = a(x)y$ sont les fonctions y définies par :*
$$\boxed{y(x) = ke^{A(x)}}$$
où $k \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque.

Exemple : $x^2 y' = y$ sur $I =]0, +\infty[$. L'équation est $y' = \frac{1}{x^2}y$, donc $a(x) = \frac{1}{x^2}$, dont une primitive est $A(x) = -\frac{1}{x}$. Les solutions sont $y(x) = ke^{-\frac{1}{x}}$, où $k \in \mathbb{R}$.

Théorème ($y' = a(x)y + b(x)$). *Soit l'équation $y' = a(x)y + b(x)$ où $a, b : I \to \mathbb{R}$. Soit y_p une solution particulière et $y_h(x)$ les solutions de l'équation homogène $y' = a(x)y$. Les solutions sont les $y = y_p + y_h$.*

Recherche d'une solution particulière : méthode de variation de la constante.

- On trouve les solutions $y(x) = ke^{A(x)}$ de l'équation homogène $y' = a(x)y$ où k est une constante.
- On cherche une solution particulière de $y' = a(x)y + b(x)$ sous la forme $y_p(x) = k(x)e^{A(x)}$, où k est maintenant une fonction.
- L'équation $y_p' = a(x)y_p + b(x)$ permet de déterminer $k'(x)$, puis $k(x)$.

Recherche d'une solution particulière : cas des coefficients constants.
$y' = ax + g(x)$, où $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante. Le principe est de chercher une solution particulière de la même forme que le second membre.

- Si $g(x) = P(x)$ est un polynôme de degré n, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = Q(x)$ où Q est aussi un polynôme de degré n.
- Si $g(x) = ce^{\beta x}$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = de^{\beta x}$.
- Si $g(x) = c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)$, on cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = d_1\cos(\beta x) + d_2\sin(\beta x)$,

Théorème (de Cauchy-Lipschitz). *Soit $y' = a(x)y + b(x)$ une équation différentielle linéaire du premier ordre, où $a, b : I \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Pour tout $x_0 \in I$ et pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une et une seule solution y telle que $y' = a(x)y + b(x)$ et $y(x_0) = y_0$.*

3. Équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants

$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$
où $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ et g continue sur I intervalle ouvert.
L'équation homogène associée
$$ay'' + by' + cy = 0 \qquad (E_h)$$
L'*équation caractéristique* est $ar^2 + br + c = 0$, de discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème.

1. *Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique a deux racines réelles distinctes $r_1 \neq r_2$ et les solutions de (E_h) sont les*
$$\boxed{y(x) = \lambda e^{r_1 x} + \mu e^{r_2 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$
2. *Si $\Delta = 0$, l'équation caractéristique a une racine double r_0 et les solutions de (E_h) sont les*
$$\boxed{y(x) = (\lambda + \mu x)e^{r_0 x} \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$
3. *Si $\Delta < 0$, l'équation caractéristique a deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$ et les solutions de (E_h) sont les*
$$\boxed{y(x) = e^{\alpha x}\big(\lambda\cos(\beta x) + \mu\sin(\beta x)\big) \quad \text{où } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.}$$

(Attention ! $y'' + y = 0$ a pour équation caractéristique $r^2 + 1 = 0$.)
Équation avec second membre
$$ay'' + by' + cy = g(x) \qquad (E)$$

Théorème (Théorème de Cauchy-Lipschitz). *Pour chaque $x_0 \in I$ et chaque couple $(y_0, y_1) \in \mathbb{R}^2$, l'équation ($E$) admet une* **unique** *solution y sur I satisfaisant aux conditions initiales :*
$$\boxed{y(x_0) = y_0 \quad \text{et} \quad y'(x_0) = y_1}$$

Second membre $g(x) = e^{\alpha x}P(x)$. $\alpha \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$
Cela comprend le cas $g(x) = e^{\alpha x}$ (donc $P(x) = 1$ et alors $Q(x)$ est une constante ci-dessous) et le cas $g(x) = P(x)$ (donc $\alpha = 0$).
On cherche une solution particulière sous la forme $y_p(x) = e^{\alpha x}x^m Q(x)$, où Q est un polynôme de même degré que P avec :

- $y_p(x) = e^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 0$), si α n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = xe^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 1$), si α est une racine simple de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = x^2 e^{\alpha x}Q(x)$ ($m = 2$), si α est une racine double de l'équation caractéristique.

Second membre du type $e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$.
Cela comprend le cas $g(x) = c_1\cos(\beta x) + c_2\sin(\beta x)$ (donc $\alpha = 0$ et P_1 et P_2 polynômes constants).
Si $g(x) = e^{\alpha x}\big(P_1(x)\cos(\beta x) + P_2(x)\sin(\beta x)\big)$, où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $P_1, P_2 \in \mathbb{R}[X]$, on cherche une solution particulière sous la forme :

- $y_p(x) = e^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$, si $\alpha + i\beta$ n'est pas une racine de l'équation caractéristique,
- $y_p(x) = xe^{\alpha x}\big(Q_1(x)\cos(\beta x) + Q_2(x)\sin(\beta x)\big)$, si $\alpha + i\beta$ est une racine de l'équation caractéristique.

Dans les deux cas, Q_1 et Q_2 sont deux polynômes de degré $n = \max\{\deg P_1, \deg P_2\}$.
Méthode de variation des constantes.
Si $\{y_1, y_2\}$ est une base de solutions de l'équation homogène (E_h), on cherche une solution particulière sous la forme $y_p = \lambda y_1 + \mu y_2$, mais cette fois λ et μ sont deux fonctions.