Développements limités

1. Formules de Taylor

Les trois formules de Taylor s'écrivent sous la forme $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ où $T_n(x)$ est toujours le même polynôme de Taylor :

$$T_n(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

C'est l'expression du reste $R_n(x)$ qui change :
Taylor-Young (la plus utile), f de classe $\mathscr{C}^n$:

$$R_n(x)=(x-a)^n\varepsilon(x)\quad \text{avec } \varepsilon(x)\xrightarrow[x\to a]{}0$$

Taylor avec reste intégral, f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$:

$$R_n(x)=\int_a^x \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n dt$$

Taylor avec reste $f^{(n+1)}(c)$, f est $n+1$ fois dérivable :

$$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

Notations.

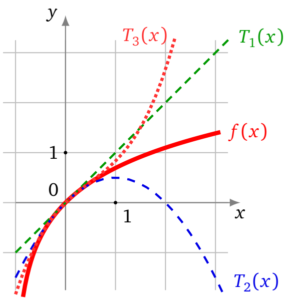
— $f: I\to\mathbb{R}$ est une fonction de ***classe*** $\mathscr{C}^n$ si f est n fois dérivable sur I et $f^{(n)}$ est continue.

— « ***petit o*** ». $o((x-a)^n)$ est une fonction telle que $\lim_{x\to a}\frac{o((x-a)^n)}{(x-a)^n}=0$. Donc le reste $(x-a)^n\varepsilon(x)$ où $\varepsilon(x)\xrightarrow[x\to 0]{}0$ est noté $o((x-a)^n)$.

Formule de Taylor-Young au voisinage de 0.

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

Approximations.
Les restes sont de plus en plus petits lorsque n croît. Les graphes des polynômes $T_1,T_2,T_3,\dots$ s'approchent de plus en plus du graphe de f. Ceci n'est vrai qu'autour de la valeur a (Ci-dessous $f(x)=\ln(1+x)$ en $a=0$).



Approximation numérique de $\sin(0,01)$. La formule de Taylor pour $f(x)=\sin x$ en $a=0$ à l'ordre 3 : $f(x)=0+1\cdot x+0\cdot\frac{x^2}{2!}-1\frac{x^3}{3!}+o(x^3)$, Pour $x=0,01$: $\sin(0,01)\simeq 0,01-\frac{(0,01)^3}{6}=0,00999983333\dots$

2. Développements limités au voisinage d'un point

Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction sur I un intervalle ouvert. Pour $a\in I$ et $n\in\mathbb{N}$, on dit que f admet un ***développement limité*** (***DL***) au point a et à l'ordre n, s'il existe des réels $c_0,c_1,\dots,c_n$ tels que pour tout $x\in I$:

$$f(x)=c_0+c_1(x-a)+\cdots+c_n(x-a)^n+o((x-a)^n).$$

La formule de Taylor-Young fournit des DL en posant, pour $k=0,1,\dots,n$:

$$\boxed{c_k=\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}$$

Proposition. *Si f admet un DL alors ce DL est unique.*

Exemple : Si f est paire (resp. impaire) alors la partie polynomiale de son DL en 0 ne contient que des monômes de degrés pairs (resp. impairs).
DL des fonctions usuelles à l'origine

$$\boxed{\exp x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+x^n\varepsilon(x)}$$

$$\operatorname{ch}x=1+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\operatorname{sh}x=\frac{x}{1!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+x^{2n+1}\varepsilon(x)$$

$$\sin x=\frac{x}{1!}-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+x^{2n+2}\varepsilon(x)$$

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+x^n\varepsilon(x)}$$

$$\boxed{(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+x^n\varepsilon(x)}$$

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^nx^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+x^n\varepsilon(x)$$

$$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1\cdot1\cdot3\cdot5\cdots(2n-3)}{2^nn!}x^n+x^n\varepsilon(x)$$

DL des fonctions en un point quelconque
On ramène le problème en 0 avec le changement de variables $h=x-a$.
Exemple : DL de $f(x)=\exp x$ en 1. On pose $h=x-1$. Si x est proche de 1 alors h est proche de 0. $\exp x=\exp(1+(x-1))=\exp(1)\exp(x-1)=e\exp h=e\left(1+h+\frac{h^2}{2!}+\cdots\right)=e\left(1+(x-1)+\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots\right)$.

3. Opérations sur les développements limités

Somme, produit, composition. Soient f et g ayant des DL en 0 à l'ordre n :
$f(x)=C(x)+o(x^n)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n+x^n\varepsilon_1(x)$
$g(x)=D(c)+o(x^n)=d_0+d_1x+\cdots+d_nx^n+x^n\varepsilon_2(x)$

Proposition.

— $(f+g)(x)=C(x)+D(x)+o(x^n)$

— $(f\times g)(x)=C(x)\times D(x)+o(x^n)$

— *Si $g(0)=0$ (c'est-à-dire $d_0=0$), $(f\circ g)(x)=C(D(x))+o(x^n)$*

Pour le produit et la composition, il faut en plus ***tronquer*** la partie polynomiale à l'ordre n, c-à-d conserver seulement les monômes de degré $\leqslant n$.
Division. Le DL d'un quotient se ramène au calcul de l'inverse $\frac{1}{1+u}$:

$$\frac{1}{1+u}=1-u+u^2-u^3+\cdots$$

Intégration. Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^n$ dont le DL en 0 à l'ordre n est $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+o(x^n)$.

Théorème. *Notons F une primitive de f. Alors F admet un DL en 0 à l'ordre $n+1$ obtenu en intégrant terme à terme :*

$$F(x)=F(0)+c_0x+c_1\frac{x^2}{2}+c_2\frac{x^3}{3}+\cdots+c_n\frac{x^{n+1}}{n+1}+o(x^{n+1})$$

Cela signifie que l'on intègre la partie polynomiale terme à terme pour obtenir le DL de $F(x)$ à la constante $F(0)$ près.

4. Applications des développements limités

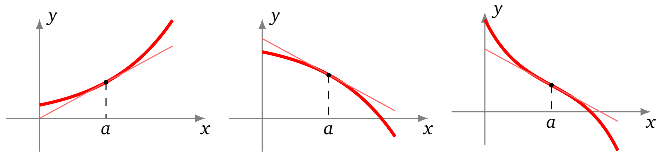
Calculs de limites. Les DL sont très efficaces pour lever des formes indéterminées !
Position d'une courbe par rapport à sa tangente

Proposition. *Soit $f: I\to\mathbb{R}$ une fonction admettant un DL en a : $f(x)=c_0+c_1(x-a)+c_k(x-a)^k+(x-a)^k\varepsilon(x)$, où $c_k\neq 0$. Alors l'équation de la tangente à la courbe de f en a est : $y=c_0+c_1(x-a)$ et la position de la courbe par rapport à la tangente pour x proche de a est donnée par le signe $f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $c_k(x-a)^k$.*

— Si ce signe est positif alors la courbe est au-dessus de la tangente.

— Si ce signe est négatif alors la courbe est en dessous de la tangente.

— Si ce signe change alors la courbe traverse la tangente au point d'abscisse a. C'est un ***point d'inflexion***.



Développement limité en $+\infty$ (développement asymptotique)
$f:]x_0,+\infty[\to\mathbb{R}$ admet un ***DL en $+\infty$*** à l'ordre n s'il existe des réels $c_0,c_1,\dots,c_n$ tels que $f(x)=c_0+\frac{c_1}{x}+\cdots+\frac{c_n}{x^n}+\frac{1}{x^n}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ où $\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$ tend vers 0 quand $x\to+\infty$.
Cela équivaut à ce que $x\to f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un DL en 0^+ à l'ordre n.

Proposition. *Si $\frac{f(x)}{x}=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_k}{x^k}+\frac{1}{x^k}\varepsilon\left(\frac{1}{x}\right)$, où $a_k\neq 0$. Alors $\lim_{x\to+\infty}f(x)-(a_0x+a_1)=0$ (resp. $x\to-\infty$) : la droite $y=a_0x+a_1$ est une* ***asymptote*** *à la courbe de f en $+\infty$ (ou $-\infty$) et la position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $f(x)-y$, c'est-à-dire le signe de $\frac{a_k}{x^{k-1}}$.*