

Dérivée d'une fonction

1. Définition

Dérivée en un point

Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Soit $x_0 \in I$. f est **dérivable en x_0** si la limite suivante existe :

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Proposition. Si f est dérivable en x_0 alors f est continue en x_0 .

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction valeur absolue est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

Tangente Une équation de la **tangente** au point $(x_0, f(x_0))$ est :

$$y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$$

2. Calculs des dérivées

$$(u + v)' = u' + v' \quad (\lambda u)' = \lambda u' \quad (u \times v)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2} \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Dérivée de fonctions usuelles

Fonction	Dérivée	Fonction	Dérivée
x^n	$nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$	u^n	$nu'u^{n-1} \quad (n \in \mathbb{Z})$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x}}$	\sqrt{u}	$\frac{1}{2} \frac{u'}{\sqrt{u}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$	u^α	$\alpha u' u^{\alpha-1} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$
e^x	e^x	e^u	$u' e^u$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin x$	$\cos x$	$\sin u$	$u' \cos u$
$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan u$	$u'(1 + \tan^2 u) = \frac{u'}{\cos^2 u}$

Composition

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Corollaire. Soit I un intervalle ouvert. Soit $f : I \rightarrow J$ dérivable et bijective dont on note $f^{-1} : J \rightarrow I$ la bijection réciproque. Si f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable et on a pour tout $x \in J$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Il peut être plus simple de retrouver la formule à chaque fois en dérivant l'égalité $f(g(x)) = x$ où $g = f^{-1}$ est la bijection réciproque de f .

Théorème (Formule de Leibniz).

$$(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)} \cdot g^{(k)}$$

Pour $n = 1$ on retrouve $(f \cdot g)' = f'g + fg'$. Pour $n = 2$, on a $(f \cdot g)'' = f''g + 2f'g' + fg''$.

3. Extremum local, théorème de Rolle

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur un intervalle I .

- On dit que x_0 est un **point critique** de f si $f'(x_0) = 0$.
- On dit que f admet un **maximum local en x_0** (resp. un **minimum local en x_0**) s'il existe un intervalle ouvert J contenant x_0 tel que

$$\text{pour tout } x \in I \cap J \quad f(x) \leq f(x_0)$$

(resp. $f(x) \geq f(x_0)$).

- On dit que f admet un **extremum local en x_0** si f admet un maximum local ou un minimum local en ce point.

Théorème. Soit I un intervalle ouvert et $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Si f admet un maximum local (ou un minimum local) en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

En d'autres termes, un maximum local (ou un minimum local) x_0 est toujours un point critique. Géométriquement, au point $(x_0, f(x_0))$ la tangente au graphe est horizontale.

La réciproque du théorème est fautive. Par exemple la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $f(x) = x^3$ vérifie $f'(0) = 0$ mais $x_0 = 0$ n'est ni maximum local ni un minimum local.

Théorème (Théorème de Rolle). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

- f est continue sur $[a, b]$,
- f est dérivable sur $]a, b[$,
- $f(a) = f(b)$.

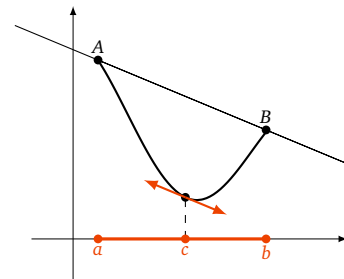
Alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est horizontale.

4. Théorème des accroissements finis

Théorème (Théorème des accroissements finis). Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$. Il existe $c \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$



Interprétation géométrique : il existe au moins un point du graphe de f où la tangente est parallèle à la droite (AB) où $A = (a, f(a))$ et $B = (b, f(b))$.

Corollaire. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$.

- $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \geq 0 \iff f$ est croissante ;
- $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) \leq 0 \iff f$ est décroissante ;
- $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) = 0 \iff f$ est constante ;
- $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) > 0 \implies f$ est strictement croissante ;
- $\forall x \in]a, b[\quad f'(x) < 0 \implies f$ est strictement décroissante.

La réciproque au point (4) (et aussi au (5)) est fautive. Par exemple la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante et pourtant sa dérivée s'annule en 0.

Corollaire (Inégalité des accroissements finis). Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur un intervalle I ouvert. S'il existe une constante M telle que pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq M$ alors

$$\forall x, y \in I \quad |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|$$

Exemple : $|\sin x| \leq |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Preuve : Soit $f(x) = \sin(x)$. Comme $f'(x) = \cos x$ alors $|f'(x)| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. L'inégalité des accroissements finis s'écrit alors $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|$. On conclut en fixant $y = 0$.

Corollaire (Règle de l'Hospital). Soient $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables et soit $x_0 \in I$. On suppose que

- $f(x_0) = g(x_0) = 0$,
- $\forall x \in I \setminus \{x_0\} \quad g'(x) \neq 0$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell \quad (\in \mathbb{R}) \quad \text{alors } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$