Systèmes linéaires

1. Introduction aux systèmes d'équations linéaires

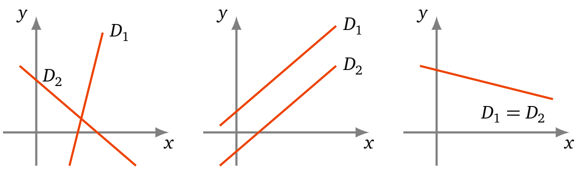
Deux droites dans le plan

Calculer l'intersection de deux droites D_1 et D_2 du plan équivaut à résoudre le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} ax+by & = & e \\ cx+dy & = & f \end{array} \right. \qquad (S)$$

Trois cas :

1. Les droites D_1 et D_2 se coupent en un seul point : le système (S) a une seule solution.
2. Les droites D_1 et D_2 sont parallèles : le système (S) n'a pas de solution.
3. Les droites D_1 et D_2 sont confondues : le système (S) a une infinité de solutions.



Résolution par la méthode de Cramer

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ le ***déterminant***. Si $ad - bc \neq 0$, on trouve une unique solution à (S) dont les coordonnées (x, y) sont :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}$$

Résolution par inversion de matrice

En termes matriciels, le système linéaire(S) est équivalent à

$$AX = Y \quad \text{où} \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}.$$

Si le déterminant de la matrice A est non nul alors la matrice A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

et l'unique solution $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ du système est donnée par

$$X = A^{-1}Y.$$

2. Théorie des systèmes linéaires

On appelle ***équation linéaire*** dans les variables (ou ***inconnues***) $x_1, \dots, x_p$ toute relation de la forme

$$a_1x_1 + \cdots + a_px_p = b, \qquad (1)$$

où $a_1, \dots, a_p$ et b sont des nombres réels donnés.

Forme générale d'un ***système de n équations linéaires à p inconnues*** :

$$\left\{ \begin{array}{cccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & + & \cdots & +a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & + & \cdots & +a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & +a_{i3}x_3 & + & \cdots & +a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & = & \vdots \\ a_{n1}x_1 & +a_{n2}x_2 & +a_{n3}x_3 & + & \cdots & +a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

— Les nombres a_{ij}, $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, p$, sont les ***coefficients*** du système. Ce sont des données. Les nombres b_i, $i = 1, \dots, n$, constituent le ***second membre*** du système et sont également des données.

— Une ***solution*** du système linéaire est une liste de p nombres réels $(s_1, s_2, \dots, s_p)$ (un p-uplet) tels que si l'on substitue s_1 pour x_1, s_2 pour x_2, etc., dans le système linéaire, on obtient une égalité. L'***ensemble des solutions du système*** est l'ensemble de tous ces p-uplets.

— On dit que deux systèmes linéaires sont ***équivalents*** s'ils ont le même ensemble de solutions.

Théorème. *Un système d'équations linéaires n'a soit aucune solution, soit une seule solution, soit une infinité de solutions.*

— Un système linéaire qui n'a aucune solution est dit ***incompatible***.

— Un ***système homogène*** c'est lorsque le second membre est nul : $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$. De tels systèmes sont toujours compatibles car ils admettent toujours la *solution triviale* $s_1 = s_2 = \cdots = s_p = 0$.

3. Résolution par la méthode du pivot de Gauss

Un système est ***échelonné*** si :

— le nombre de coefficients nuls commençant une ligne croît strictement ligne après ligne.

Il est ***échelonné réduit*** si en plus :

— le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1 ;

— et c'est le seul élément non nul de sa colonne.

Opérations sur les équations d'un système

Les trois opérations élémentaires sur les équations sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une équation par un réel non nul.
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à l'équation L_i un multiple d'une autre équation L_j.
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux équations.

Ces trois opérations élémentaires ne changent pas les solutions d'un système linéaire ; autrement dit ces opérations transforment un système linéaire en un système linéaire équivalent.

Méthode du pivot de Gauss

La méthode du pivot de Gauss permet de trouver les solutions de n'importe quel système linéaire par des opérations élémentaires sur les lignes. Les étapes sont :

1. Passage à une forme échelonnée.
2. Passage à une forme réduite.
3. Solutions.

Théorème. *Tout système homogène d'équations linéaires dont le nombre d'inconnues est strictement plus grand que le nombre d'équations a une infinité de solutions.*