

Matrices

1. Définition

Une matrice de **taille** $n \times p$ (n lignes et p colonnes) :

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,j} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

L'ensemble de telles matrices est noté $M_{n,p}(\mathbb{K})$.

- Si $n = p$ (même nombre de lignes que de colonnes), la matrice est dite **matrice carrée**. On note $M_n(\mathbb{K})$ au lieu de $M_{n,n}(\mathbb{K})$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Les éléments $a_{1,1}, a_{2,2}, \dots, a_{n,n}$ forment la **diagonale principale**.

- La matrice (de taille $n \times p$) dont tous les coefficients sont des zéros est appelée la **matrice nulle** et est notée $0_{n,p}$ ou plus simplement 0 .

Définition (Somme de deux matrices). Soient A et B deux matrices ayant la même taille $n \times p$. Leur **somme** $C = A + B$ est la matrice de taille $n \times p$ définie par

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire). Le produit d'une matrice $A = (a_{ij})$ de $M_{n,p}(\mathbb{K})$ par un scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ est la matrice (αa_{ij}) formée en multipliant chaque coefficient de A par α . Elle est notée $\alpha \cdot A$ (ou simplement αA).

2. Multiplication de matrices

Le produit AB de deux matrices A et B est défini si et seulement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B .

Définition (Produit de deux matrices). Soient $A = (a_{ij})$ une matrice $n \times p$ et $B = (b_{ij})$ une matrice $p \times q$. Alors le produit $C = AB$ est une matrice $n \times q$ dont les coefficients c_{ij} sont définis par :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}$$

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ik} b_{kj} + \dots + a_{ip} b_{pj}.$$

Proposition.

1. $A(BC) = (AB)C$: associativité,
2. $A(B + C) = AB + AC$ et $(B + C)A = BA + CA$: distributivité,
3. $A \cdot 0 = 0$ et $0 \cdot A = 0$.

Pièges à éviter

- Premier piège. Le produit de matrices n'est pas commutatif en général.
- Deuxième piège. $AB = 0$ n'implique pas $A = 0$ ou $B = 0$.
- Troisième piège. $AB = AC$ n'implique pas $B = C$.

La matrice carrée suivante est la **matrice identité** :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Proposition. Si A est une matrice $n \times p$, alors

$$I_n \cdot A = A \quad \text{et} \quad A \cdot I_p = A.$$

Puissance

Si $A \in M_n(\mathbb{K})$ est une matrice carrée, on peut multiplier une matrice carrée par elle-même : on note $A^2 = A \times A$, $A^3 = A \times A \times A$. La formule de récurrence est $A^0 = I_n$ et $A^{p+1} = A^p \times A$ pour tout $p \in \mathbb{N}$.

3. Inverse d'une matrice : définition

Définition (Matrice inverse). Soit A une matrice carrée de taille $n \times n$. S'il existe une matrice carrée B de taille $n \times n$ telle que

$$AB = I \quad \text{et} \quad BA = I,$$

on dit que A est **inversible**. On appelle B l'**inverse de A** et on la note A^{-1} .

Il suffit en fait de vérifier une seule des conditions $AB = I$ ou bien $BA = I$. L'ensemble des matrices inversibles de $M_n(\mathbb{K})$ est noté $GL_n(\mathbb{K})$.

Proposition.

- Si A est inversible, alors son inverse est unique.
- Soit A une matrice inversible. Alors A^{-1} est aussi inversible et on a : $(A^{-1})^{-1} = A$.
- Soient A et B deux matrices inversibles de même taille. Alors AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Il faut bien faire attention à l'inversion de l'ordre!
- Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{K})$ et C une matrice inversible de $M_n(\mathbb{K})$. Alors l'égalité $AC = BC$ implique l'égalité $A = B$.

4. Inverse d'une matrice : calcul

Considérons la matrice 2×2 : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Proposition. Si $ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Méthode de Gauss pour inverser les matrices

La méthode pour inverser une matrice A consiste à faire des opérations élémentaires sur les lignes de la matrice A jusqu'à la transformer en la matrice identité I . En pratique, à côté de la matrice A que l'on veut inverser, on rajoute la matrice identité pour former un tableau $(A | I)$. Sur les lignes de cette matrice augmentée, on effectue des opérations élémentaires jusqu'à obtenir le tableau $(I | B)$. Et alors $B = A^{-1}$.

Ces opérations élémentaires sur les lignes sont :

1. $L_i \leftarrow \lambda L_i$ avec $\lambda \neq 0$: on peut multiplier une ligne par un réel non nul (ou un élément de $\mathbb{K} \setminus \{0\}$).
2. $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ (et $j \neq i$) : on peut ajouter à la ligne L_i un multiple d'une autre ligne L_j .
3. $L_i \leftrightarrow L_j$: on peut échanger deux lignes.

5. Inverse d'une matrice : systèmes linéaires

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}}_X = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}}_B.$$

Proposition. Si la matrice A est inversible, alors la solution du système linéaire $AX = B$ est unique et est :

$$X = A^{-1}B$$

6. Matrices triangulaires, transposée...

Soit A une matrice de taille $n \times n$. On dit que A est **triangulaire inférieure** si ses éléments au-dessus de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i < j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire inférieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

On dit que A est **triangulaire supérieure** si ses éléments en-dessous de la diagonale sont nuls, autrement dit :

$$i > j \implies a_{ij} = 0.$$

Une matrice triangulaire supérieure a la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & \dots & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & \dots & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Une matrice qui est triangulaire inférieure **et** triangulaire supérieure est dite **diagonale**. Autrement dit : $i \neq j \implies a_{ij} = 0$.

Théorème. Une matrice A de taille $n \times n$, triangulaire, est inversible si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous non nuls.

Soit A la matrice de taille $n \times p$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Définition. On appelle **matrice transposée** de A la matrice A^T de taille $p \times n$ définie par :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}.$$

Autrement dit : le coefficient à la place (i, j) de A^T est a_{ji} . Ou encore la i -ème ligne de A devient la i -ème colonne de A^T (et réciproquement la j -ème colonne de A^T est la j -ème ligne de A).

Notation : La transposée de la matrice A se note aussi souvent tA .

Théorème.

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(AB)^T = B^T A^T$
5. Si A est inversible, alors A^T l'est aussi et on a $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Notez bien l'inversion : $(AB)^T = B^T A^T$.

Définition. La **trace** d'une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{K})$ est le nombre obtenu en additionnant les éléments diagonaux de A . Autrement dit,

$$\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}.$$

Théorème. Soient A et B deux matrices $n \times n$. Alors :

1. $\text{tr}(A+B) = \text{tr}A + \text{tr}B$,
2. $\text{tr}(\alpha A) = \alpha \text{tr}A$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$,
3. $\text{tr}(A^T) = \text{tr}A$,
4. $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est **symétrique** si elle est égale à sa transposée, c'est-à-dire si $A = A^T$, ou encore si $a_{ij} = a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$. Les coefficients sont donc symétriques par rapport à la diagonale.

Définition. Une matrice A de taille $n \times n$ est **antisymétrique** si $A^T = -A$, c'est-à-dire si $a_{ij} = -a_{ji}$ pour tout $i, j = 1, \dots, n$.