Logique et raisonnements

1. Logique

Une ***assertion*** est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Et logique. L'assertion « P **et** Q » est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion « P *et* Q » est fausse sinon.

Sa ***table de vérité*** :

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	F

Table de vérité de « P *et* Q »

Ou logique. L'assertion « P **ou** Q » est vraie si l'une (au moins) des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion « P *ou* Q » est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses.

$P \setminus Q$	V	F
V	V	V
F	V	F

Table de vérité de « P *ou* Q »

L'assertion « **non** P » est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	V	F
non P	F	V

Table de vérité de « *non* P »

L'implication $\Longrightarrow$

La définition mathématique est la suivante :

L'assertion « *(non P) ou Q* » est notée « $P \implies Q$ ».

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	V	V

Table de vérité de « $P \implies Q$ »

L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'***équivalence*** est définie par :

« $P \iff Q$ » est l'assertion « $(P \implies Q)$ *et* $(Q \implies P)$ ».

$P \setminus Q$	V	F
V	V	F
F	F	V

Table de vérité de « $P \iff Q$ »

Proposition. *Soient P, Q, R trois assertions. Nous avons les équivalences (vraies) suivantes :*

1. $P \iff \text{non}(\text{non}(P))$
2. $(P \text{ et } Q) \iff (Q \text{ et } P)$
3. $(P \text{ ou } Q) \iff (Q \text{ ou } P)$
4. $\text{non}(P \text{ et } Q) \iff (\text{non } P) \text{ ou } (\text{non } Q)$
5. $\text{non}(P \text{ ou } Q) \iff (\text{non } P) \text{ et } (\text{non } Q)$
6. $\big(P \text{ et } (Q \text{ ou } R)\big) \iff (P \text{ et } Q) \text{ ou } (P \text{ et } R)$
7. $\big(P \text{ ou } (Q \text{ et } R)\big) \iff (P \text{ ou } Q) \text{ et } (P \text{ ou } R)$
8. « $P \implies Q$ » $\iff$ « $\text{non}(Q) \implies \text{non}(P)$ »

Le quantificateur $\forall$: « *pour tout* »

L'assertion
$$\forall x \in E \quad P(x)$$
est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E.

Le quantificateur $\exists$: « *il existe* »

L'assertion
$$\exists x \in E \quad P(x)$$
est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un x de E pour lequel $P(x)$ est vraie.

La négation des quantificateurs

La négation de « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est « $\exists x \in E \quad \textit{non } P(x)$ ».

La négation de « $\exists x \in E \quad P(x)$ » est « $\forall x \in E \quad \textit{non } P(x)$ ».

L'ordre des quantificateurs est très important.

2. Raisonnements

Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion « $P \implies Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion $P(x)$ pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de ***disjonction*** ou du ***cas par cas***.

Contraposée

Le raisonnement par ***contraposition*** est basé sur l'équivalence suivante :

L'assertion « $P \implies Q$ » est équivalente à « $\textit{non}(Q) \implies \textit{non}(P)$ ».

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion « $P \implies Q$ », on montre en fait que si non(Q) est vraie alors non(P) est vraie.

Absurde

Le ***raisonnement par l'absurde*** pour montrer « $P \implies Q$ » repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc « $P \implies Q$ » est vraie.

Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type « $\forall x \in E \quad P(x)$ » est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. Trouver un tel x c'est trouver un ***contre-exemple***.

Récurrence

Le ***principe de récurrence*** permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration se déroule en trois étapes :

— ***initialisation*** : on prouve $P(0)$.

— ***hérédité*** : qui commence par « Je fixe $n \geqslant 0$ et je suppose que l'assertion $P(n)$ vraie. je vais montrer que l'assertion $P(n+1)$ (au rang suivant) est vraie... »

— ***conclusion*** : par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.