L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1. Vecteurs de $\mathbb{R}^n$

Si $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ $\quad u+v = \begin{pmatrix} u_1+v_1 \\ \vdots \\ u_n+v_n \end{pmatrix} \qquad -u = \begin{pmatrix} -u_1 \\ \vdots \\ -u_n \end{pmatrix}$

$$\lambda \cdot u = \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \vdots \\ \lambda u_n \end{pmatrix} \qquad 0 = 0_{\mathbb{R}^n} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Propriétés définissant l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$:

1. $u + v = v + u$
2. $u + (v + w) = (u + v) + w$
3. $u + 0 = 0 + u = u$
4. $u + (-u) = 0$
5. $1 \cdot u = u$
6. $\lambda \cdot (\mu \cdot u) = (\lambda\mu) \cdot u$
7. $\lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$
8. $(\lambda + \mu) \cdot u = \lambda \cdot u + \mu \cdot u$

Produit scalaire

— u, v sont ***colinéaires*** ssi $\exists \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \lambda u + \mu v = 0,\ (\lambda, \mu) \neq (0,0)$

— ***produit scalaire*** :

$$\langle u \mid v \rangle = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i = \|u\|\,\|v\| \cos \angle(u, v)$$

— ***norme***

$$\|u\| = \sqrt{\langle u \mid u \rangle} = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_n^2}$$

— En dimension 3 uniquement, le ***produit vectoriel*** est :

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

— le ***produit mixte***

$$[u, v, w] = \langle u \mid v \wedge w \rangle = \det(u, v, w) = \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix}$$

Propriétés du produit scalaire et du produit vectoriel :

1. $\langle v \mid u \rangle = \langle u \mid v \rangle$
2. $\langle \lambda u + u' \mid v \rangle = \lambda \langle u \mid v \rangle + \langle u' \mid v \rangle$
3. $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$
4. $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ avec égalité ssi u et v colinéaires (*inégalité triangulaire*)
5. $v \wedge u = -u \wedge v$, $u \wedge u = 0$
6. $(\lambda u + u') \wedge v = \lambda(u \wedge v) + u' \wedge v$

2. Exemples d'applications linéaires

En notation matricielle, $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est une ***application linéaire*** si $f(X) = AX$ où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ et $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ est une matrice notée $\mathrm{Mat}(f)$.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$.

réflexion par rapport à l'axe (Ox) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

réflexion par rapport à l'axe (Oy) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

homothétie de rapport λ, centrée à l'origine $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

rotation d'angle θ, centrée à l'origine $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

projection sur l'axe (Ox) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

réflexion par rapport au plan (Oxy) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

rotation d'angle θ d'axe (Oz) $\quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

3. Propriétés des applications linéaires

— $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ est linéaire ssi

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \forall u, v \in \mathbb{R}^p,\ f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

— $\mathrm{Mat}(f \circ g) = \mathrm{Mat}(f) \times \mathrm{Mat}(g)$

— Si f est bijective, $\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$.