Ensembles et applications

1. Ensembles

— Un *ensemble* est une collection d'éléments.
— L'*ensemble vide*, $\varnothing$ est l'ensemble ne contenant aucun élément.
— On note

$$\boxed{x \in E}$$

si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.
— L'*inclusion*. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E \ (x \in F)$. On dit alors que E est un *sous-ensemble* de F ou une *partie* de F.
— L'*égalité*. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.
— *Ensemble des parties* de E. On note $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1,2,3\}$:

$$\mathscr{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

— *Complémentaire*. Si $A \subset E$,

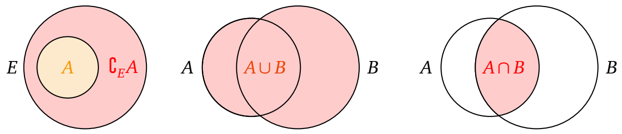
$$\boxed{\complement_E A = \big\{x \in E \mid x \notin A\big\}}$$

On le note aussi $E \setminus A$ et juste $\complement A$ s'il n'y a pas d'ambiguïté (et parfois aussi A^c ou $\overline{A}$).
— *Union*. Pour $A, B \subset E$,

$$\boxed{A \cup B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\big\}}$$

Le « *ou* » n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.
— *Intersection*.

$$\boxed{A \cap B = \big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\big\}}$$



Règles de calculs
Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.
— $A \cap B = B \cap A$
— $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (on peut écrire $A \cap B \cap C$ sans ambigüité)
— $A \cap \varnothing = \varnothing$, $\quad A \cap A = A$, $\quad A \subset B \iff A \cap B = A$

— $A \cup B = B \cup A$
— $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (on peut écrire $A \cup B \cup C$ sans ambigüité)
— $A \cup \varnothing = A$, $\quad A \cup A = A$, $\quad A \subset B \iff A \cup B = B$

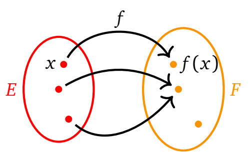
— $\boxed{A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)}$
— $\boxed{A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)}$

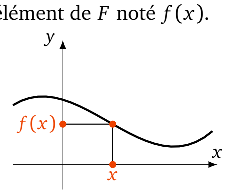
— $\complement\big(\complement A\big) = A$ $\quad$ et donc $\quad A \subset B \iff \complement B \subset \complement A$
— $\complement(A \cap B) = \complement A \cup \complement B$
— $\complement(A \cup B) = \complement A \cap \complement B$

Produit cartésien
Soient E et F deux ensembles. Le *produit cartésien*, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

2. Applications

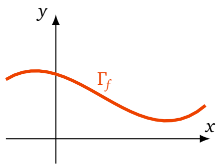
— Une *application* (ou une *fonction*) $f : E \to F$, c'est la donnée pour chaque élément $x \in E$ d'un unique élément de F noté $f(x)$.



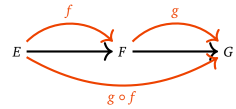


— *Égalité*. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
— Le *graphe* de $f : E \to F$ est

$$\boxed{\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}}$$



— *Composition*. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.

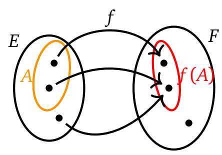


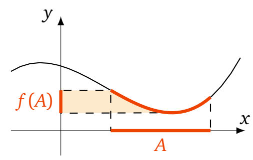
— *Restriction*. Soient $f : E \to F$ et $A \subset E$ alors la restriction de f à A est l'application $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}$.

Image directe, image réciproque
Soient E, F deux ensembles.

Définition. Soit $A \subset E$ et $f : E \to F$, l'*image directe* de A par f est l'ensemble

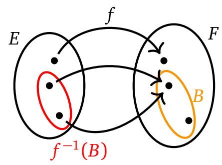
$$\boxed{f(A) = \big\{f(x) \mid x \in A\big\}}$$

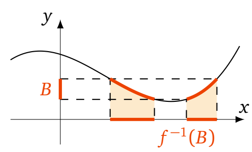




Définition. Soit $B \subset F$ et $f : E \to F$, l'*image réciproque* de B par f est l'ensemble

$$\boxed{f^{-1}(B) = \big\{x \in E \mid f(x) \in B\big\}}$$





Fixons $y \in F$. Tout élément $x \in E$ tel que $f(x) = y$ est un *antécédent* de y. En termes d'image réciproque l'ensemble des antécédents de y est $f^{-1}(\{y\})$.

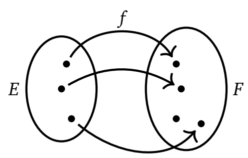
3. Injection, surjection, bijection

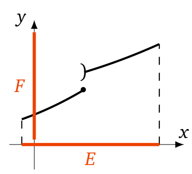
Injection, surjection
Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition. f est *injective* si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)}$$

Les applications f représentées sont injectives :

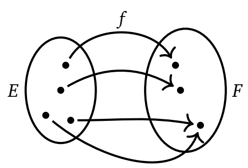


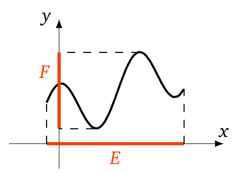


Définition. f est *surjective* si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Une autre formulation : f est surjective si et seulement si $f(E) = F$.
Les applications f représentées sont surjectives :





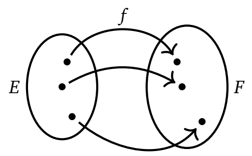
— f est injective si et seulement si tout élément y de F a *au plus* un antécédent (et éventuellement aucun).
— f est surjective si et seulement si tout élément y de F a *au moins* un antécédent.

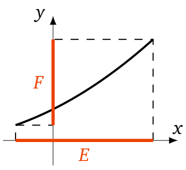
Bijection

Définition. f est ***bijective*** si elle est injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists! x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Autrement dit, tout élément de F a un unique antécédent par f.





Proposition. *Soit E, F des ensembles et $f : E \to F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la* **bijection réciproque** *de f et est notée f^{-1}. De plus $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*

Proposition. *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

4. Ensembles finis

Définition. Un ensemble E est ***fini*** s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ et une bijection de E vers $\{1, 2, \ldots, n\}$. Cet entier n est unique et s'appelle le ***cardinal*** de E (ou le ***nombre d'éléments***) et est noté $\mathrm{Card}\, E$. Le cardinal de l'ensemble vide est 0.

Quelques propriétés :

— Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors B est aussi un ensemble fini et $\mathrm{Card}\, B \leqslant \mathrm{Card}\, A$.

— Si A, B sont des ensembles finis disjoints (c'est-à-dire $A \cap B = \varnothing$) alors $\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B$.

— Si A est un ensemble fini et $B \subset A$ alors $\mathrm{Card}(A \setminus B) = \mathrm{Card}\, A - \mathrm{Card}\, B$. En particulier si $B \subset A$ et $\mathrm{Card}\, A = \mathrm{Card}\, B$ alors $A = B$.

— Enfin pour A, B deux ensembles finis quelconques :

$$\boxed{\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}\, A + \mathrm{Card}\, B - \mathrm{Card}(A \cap B)}$$

Injection, surjection, bijection

Proposition. *Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application.*

1. *Si f est injective alors $\mathrm{Card}\, E \leqslant \mathrm{Card}\, F$.*
2. *Si f est surjective alors $\mathrm{Card}\, E \geqslant \mathrm{Card}\, F$.*
3. *Si f est bijective alors $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$.*

Proposition. *Soit E, F deux ensembles finis et $f : E \to F$ une application. Si $\mathrm{Card}\, E = \mathrm{Card}\, F$ alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

i. *f est injective,*
ii. *f est surjective,*
iii. *f est bijective.*

Proposition (Principe des tiroirs)**.** *Si l'on range dans k tiroirs, $n > k$ paires de chaussettes alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.*

Nombres d'applications

Soient E, F des ensembles finis, non vides. On note $\mathrm{Card}\, E = n$ et $\mathrm{Card}\, F = p$.

Proposition. *Le nombre d'applications différentes de E dans F est :* $\boxed{p^n}$

Autrement dit c'est $\boxed{(\mathrm{Card}\, F)^{\mathrm{Card}\, E}}$.

Proposition. *Le nombre d'injections de E dans F est :*

$$p \times (p-1) \times \cdots \times (p - (n-1)).$$

Notation ***factorielle*** : $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$. Avec $1! = 1$ et par convention $0! = 1$.

Proposition. *Le nombre de bijections d'un ensemble E de cardinal n dans lui-même est :* $\boxed{n!}$

Coefficients du binôme de Newton

Soit E un ensemble fini de cardinal n.

Proposition. *Il y a $2^{\mathrm{Card}\, E}$ sous-ensembles de E :* $\boxed{\mathrm{Card}\, \mathscr{P}(E) = 2^n}$

Définition. Le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n éléments est noté $\binom{n}{k}$ ou C_n^k.

Proposition.

— $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{n} = 1$.

— $\boxed{\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}}$

— $\boxed{\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \cdots + \binom{n}{k} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n}$

Proposition.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} \qquad (0 < k < n)}$$

Le triangle de Pascal est un algorithme pour calculer ces coefficients $\binom{n}{k}$. Chaque élément est obtenu en ajoutant les deux nombres qui lui sont juste au-dessus et au-dessus à gauche.

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Proposition.

$$\boxed{\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}}$$

Formule du binôme de Newton

Théorème. *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) et n un entier positif alors :*

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k}$$

Autrement dit :

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n \cdot b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} \cdot b^1 + \cdots + \binom{n}{k} a^{n-k} \cdot b^k + \cdots + \binom{n}{n} a^0 \cdot b^n$$

5. Relation d'équivalence

Une ***relation*** sur un ensemble E, c'est la donnée pour tout couple $(x, y) \in E \times E$ de « Vrai » (s'ils sont en relation), ou de « Faux » sinon.

Définition. Soit E un ensemble et $\mathscr{R}$ une relation, c'est une ***relation d'équivalence*** si :

— $\forall x \in E,\ x \mathscr{R} x, \quad$ (***réflexivité***)

— $\forall x, y \in E,\ x \mathscr{R} y \implies y \mathscr{R} x, \quad$ (***symétrie***)

— $\forall x, y, z \in E,\ x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z \implies x \mathscr{R} z, \quad$ (***transitivité***)

Définition. Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Soit $x \in E$, la ***classe d'équivalence*** de x est

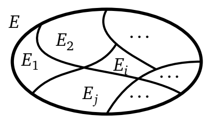
$$\boxed{\mathrm{cl}(x) = \big\{y \in E \mid y \mathscr{R} x\big\}}$$

$\mathrm{cl}(x)$ est donc un sous-ensemble de E, on le note aussi $\overline{x}$. Si $y \in \mathrm{cl}(x)$, on dit que y un ***représentant*** de $\mathrm{cl}(x)$.

Proposition.

1. *$cl(x) = cl(y) \iff x \mathscr{R} y$.*
2. *Pour tout $x, y \in E$, $cl(x) = cl(y)$ ou $cl(x) \cap cl(y) = \varnothing$.*
3. *Soit C un ensemble de représentants de toutes les classes alors $\big\{cl(x) \mid x \in C\big\}$ constitue une partition de E.*

Une ***partition*** de E est un ensemble $\{E_i\}$ de parties de E tel que $E = \bigcup_i E_i$ et $E_i \cap E_j = \varnothing$ (si $i \neq j$).



L'ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Soit $n \geqslant 2$ un entier fixé. La relation suivante sur l'ensemble $E = \mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence :

$$\boxed{a \equiv b \pmod n \quad \iff \quad a - b \text{ est un multiple de } n}$$

La classe d'équivalence de $a \in \mathbb{Z}$ est notée $\overline{a}$:

$$\overline{a} = \mathrm{cl}(a) = \big\{b \in \mathbb{Z} \mid b \equiv a \pmod n\big\}.$$

Comme un tel b s'écrit $b = a + kn$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ alors :

$$\overline{a} = a + n\mathbb{Z} = \big\{a + kn \mid k \in \mathbb{Z}\big\}.$$

L'ensemble des classes d'équivalence est l'ensemble

$$\boxed{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \big\{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \ldots, \overline{n-1}\big\}}$$

qui contient exactement n éléments.