Dimension finie

E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Famille libre

Une famille $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de E est une ***famille libre*** ou ***linéairement indépendante*** si toute combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_p v_p = 0$$

est telle que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 0, \quad \dots \quad \lambda_p = 0.$$

Dans le cas contraire, c'est-à-dire s'il existe une combinaison linéaire nulle à coefficients non tous nuls, on dit que la famille est ***liée*** ou ***linéairement dépendante***.

Théorème. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Une famille $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de $p \geqslant 2$ vecteurs de E est une famille liée si et seulement si au moins un des vecteurs de $\mathscr{F}$ est combinaison linéaire des autres vecteurs de $\mathscr{F}$.*

Exemples :

- Dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, deux vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont colinéaires.
- Dans $\mathbb{R}^3$, trois vecteurs sont linéairement dépendants si et seulement s'ils sont coplanaires.

Proposition. *Soit $\mathscr{F} = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$. Si $\mathscr{F}$ contient plus de n éléments (c'est-à-dire $p > n$), alors $\mathscr{F}$ est une famille liée.*

2. Famille génératrice

Une famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ de vecteurs de E est une ***famille génératrice*** de l'espace vectoriel E si tout vecteur de E est une combinaison linéaire des vecteurs $v_1, \dots, v_p$. Ce qui peut s'écrire aussi :

$$\forall v \in E \qquad \exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K} \qquad v = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_p v_p$$

On dit aussi que la famille $\{v_1, \dots, v_p\}$ ***engendre*** l'espace vectoriel E.
Les vecteurs $\{v_1, \dots, v_p\}$ forment une famille génératrice de E si et seulement si $E = \mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_p)$.

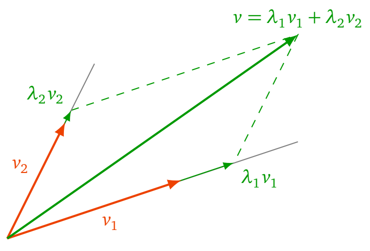
Proposition. *Soit $\mathscr{F} = \left\{v_1, v_2, \dots, v_p\right\}$ une famille génératrice de E. Alors $\mathscr{F}' = \left\{v'_1, v'_2, \dots, v'_q\right\}$ est aussi une famille génératrice de E si et seulement si tout vecteur de $\mathscr{F}$ est une combinaison linéaire de vecteurs de $\mathscr{F}'$.*

3. Base

Une famille $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de vecteurs de E est une ***base*** de E si $\mathscr{B}$ est une famille libre ***et*** génératrice.

Théorème. *Si $\mathscr{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ est une base de E, alors tout vecteur $v \in E$ s'exprime de façon unique comme combinaison linéaire d'éléments de $\mathscr{B}$. Autrement dit, il* **existe** *des scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$* **uniques** *tels que :*

$$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n.$$



Exemples :

- Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots \quad e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ forment une base de $\mathbb{K}^n$, appelée la ***base canonique*** de $\mathbb{K}^n$.
- La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathscr{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$. Attention, il y a $n+1$ vecteurs !

Théorème (Théorème d'existence d'une base)**.** *Tout espace vectoriel admettant une famille finie génératrice admet une base.*

Théorème (Théorème de la base incomplète)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel admettant une famille génératrice finie.*

1. Toute famille libre $\mathscr{L}$ peut être complétée en une base. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathscr{F}$ telle que $\mathscr{L} \cup \mathscr{F}$ soit une famille libre et génératrice de E.*
2. De toute famille génératrice $\mathscr{G}$ on peut extraire une base de E. *C'est-à-dire qu'il existe une famille $\mathscr{B} \subset \mathscr{G}$ telle que $\mathscr{B}$ soit une famille libre et génératrice de E.*

4. Dimension d'un espace vectoriel

Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E admettant une base ayant un nombre fini d'éléments est dit de ***dimension finie***.
Par le théorème d'existence d'une base, c'est équivalent à l'existence d'une famille finie génératrice.

Théorème (Théorème de la dimension)**.** *Toutes les bases d'un espace vectoriel E de dimension finie ont le même nombre d'éléments $\dim E$.*

Exemples :

- Plus généralement, $\mathbb{K}^n$ est de dimension n, car par exemple sa base canonique $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ contient n éléments.
- $\dim \mathbb{R}_n[X] = n+1$ car une base de $\mathbb{R}_n[X]$ est $(1, X, X^2, \dots, X^n)$, qui contient $n+1$ éléments.

Les espaces vectoriels suivants ne sont pas de dimension finie :

- $\mathbb{R}[X]$: l'espace vectoriel de tous les polynômes,
- $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$: l'espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème. *Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, et $\mathscr{F} = (v_1, \dots, v_n)$ une famille de* **n** *vecteurs de E. Il y a équivalence entre :*

(i) $\mathscr{F}$ est une base de E,
(ii) $\mathscr{F}$ est une famille libre de E,
(iii) $\mathscr{F}$ est une famille génératrice de E.

5. Dimension des sous-espaces vectoriels

Théorème. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.*

1. *Alors tout sous-espace vectoriel F de E est de dimension finie et $\dim F \leqslant \dim E$.*
2. *$F = E \iff \dim F = \dim E$.*

Vocabulaire.

- un sous-espace vectoriel de dimension 1 est appelé ***droite vectorielle***,
- un sous-espace vectoriel de dimension 2 est appelé ***plan vectoriel***,
- un sous-espace vectoriel dimension $n-1$ dans un espace vectoriel de dimension n est appelé ***hyperplan***.

Corollaire. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E. On suppose que F est de dimension finie et que $G \subset F$. Alors :*

$$F = G \iff \dim F = \dim G$$

Autrement dit, sachant qu'un sous-espace est inclus dans un autre, alors pour montrer qu'ils sont égaux il suffit de montrer l'égalité des dimensions.

Théorème (Théorème des quatre dimensions)**.** *Soient E un espace vectoriel de dimension finie et F, G des sous-espaces vectoriels de E. Alors :*

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)}$$

Corollaire. *Si $E = F \oplus G$, alors $\dim E = \dim F + \dim G$.*

Corollaire. *Tout sous-espace vectoriel F d'un espace vectoriel E de dimension finie admet un supplémentaire.*