Nombres complexes

1. $z = a + \mathrm{i}\, b$

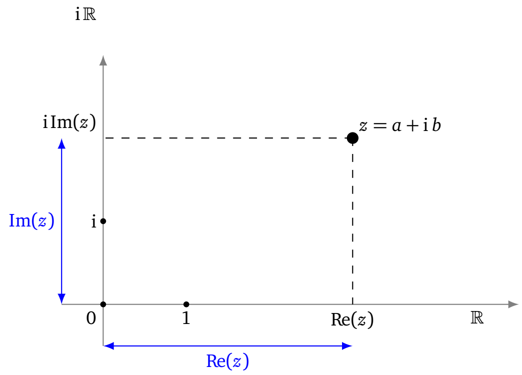
Un ***nombre complexe*** est un couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ que l'on notera $a + \mathrm{i}\, b$, avec :

$$\boxed{\mathrm{i}^2 = -1}$$

Pour $z = a + \mathrm{i}\, b$ et $z' = a' + \mathrm{i}\, b'$:

- ***addition*** : $(a+\mathrm{i}\, b) + (a' + \mathrm{i}\, b') = (a+a') + \mathrm{i}(b+b')$
- ***multiplication*** : $(a+\mathrm{i}\, b) \times (a'+\mathrm{i}\, b') = (aa' - bb') + \mathrm{i}(ab' + ba')$. On développe en suivant les règles de la multiplication usuelle et la relation $\mathrm{i}^2 = -1$

Soit $z = a + \mathrm{i}\, b$ un nombre complexe, sa ***partie réelle*** est le réel a et on la note $\mathrm{Re}(z)$; sa ***partie imaginaire*** est le réel b et on la note $\mathrm{Im}(z)$.



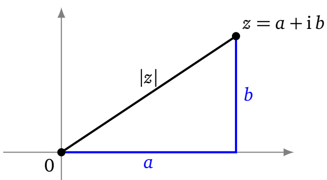
- L'***inverse*** : si $z \neq 0$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$ (où $1 = 1 + \mathrm{i} \times 0$).
- La ***division*** : $\frac{z}{z'}$ est le nombre complexe $z \times \frac{1}{z'}$.
- Propriété d'intégrité : si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$.
- Puissances : $z^2 = z \times z$, $z^n = z \times \cdots \times z$ (n fois, $n \in \mathbb{N}$). Par convention $z^0 = 1$ et $z^{-n} = \left(\frac{1}{z}\right)^n = \frac{1}{z^n}$.

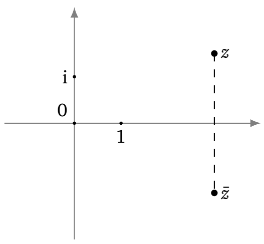
Proposition. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$ différent de 1 :*

$$\boxed{1 + z + z^2 + \cdots + z^n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}.}$$

2. Module

- Le ***module*** de $z = a + \mathrm{i}\, b$ est le réel positif $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}$.
- Le ***conjugué*** de $z = a + \mathrm{i}\, b$ est $\boxed{\bar{z} = a - \mathrm{i}\, b}$.
- $\boxed{|z|^2 = z\bar{z}}$ car $z \times \bar{z} = (a + \mathrm{i}\, b)(a - \mathrm{i}\, b) = a^2 + b^2$.

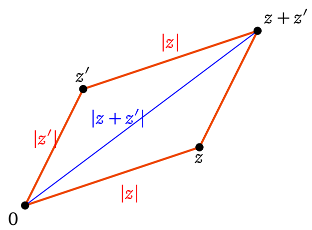




- $\overline{z + z'} = \bar{z} + \overline{z'}$, $\quad \bar{\bar{z}} = z$, $\quad \overline{zz'} = \bar{z}\overline{z'}$
- $z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R}$
- $|z|^2 = z \times \bar{z}$, $\quad |\bar{z}| = |z|$, $\quad |zz'| = |z||z'|$
- $|z| = 0 \iff z = 0$

Proposition (L'inégalité triangulaire)**.**

$$\boxed{\left|z + z'\right| \leqslant |z| + \left|z'\right|}$$



3. Équation du second degré

Pour $z \in \mathbb{C}$, une ***racine carrée*** est un nombre complexe ω tel que $\omega^2 = z$. Tout nombre complexe, admet deux racines carrées, ω et $-\omega$.

Proposition. *L'équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$, possède deux solutions $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ éventuellement confondues.*
Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant et $\delta \in \mathbb{C}$ une racine carrée de Δ. Alors les solutions sont

$$\boxed{z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.}$$

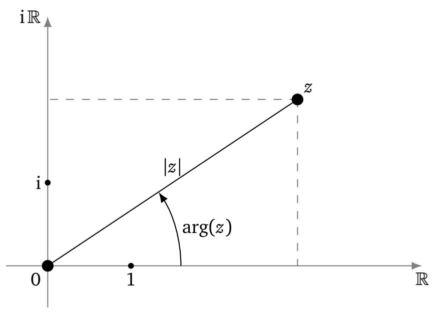
Corollaire. *Si les coefficients a, b, c sont réels alors $\Delta \in \mathbb{R}$ et les solutions sont de trois types :*

- *si $\Delta > 0$, on a deux solutions réelles $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$,*
- *si $\Delta = 0$, la racine double est réelle et vaut $-\dfrac{b}{2a}$,*
- *si $\Delta < 0$, on a deux solutions complexes conjuguées $\dfrac{-b \pm \mathrm{i}\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.*

Théorème (d'Alembert–Gauss)**.** *Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ un polynôme à coefficients complexes et de degré n. Alors l'équation $P(z) = 0$ admet exactement n solutions complexes comptées avec leur multiplicité. Il existe donc des nombres complexes $z_1, \ldots, z_n$ (dont certains sont éventuellement confondus) tels que $P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n)$.*

4. Argument

Pour tout $z \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, un nombre $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$ est appelé un ***argument*** de z et noté $\theta = \arg(z)$.



Cet argument est défini modulo 2π. On peut imposer à cet argument d'être unique si on rajoute la condition $\theta \in]-\pi, +\pi]$ (ou bien $\theta \in [0, 2\pi[$).

$$\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi} \iff \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \theta' + 2k\pi \iff \begin{cases} \cos\theta = \cos\theta' \\ \sin\theta = \sin\theta' \end{cases}$$

Proposition.

- $\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi}$
- $\arg(z^n) \equiv n\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(1/z) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi}$
- $\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z \pmod{2\pi}$

5. Formule de Moivre, notation exponentielle

La ***formule de Moivre*** est :

$$\boxed{(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)}$$

Nous définissons la ***notation exponentielle*** par

$$\boxed{e^{\mathrm{i}\,\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta}$$

et donc tout nombre complexe s'écrit

$$\boxed{z = \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}}$$

où $\rho = |z|$ est le module et $\theta = \arg(z)$ est un argument.

Avec la notation exponentielle, on peut écrire pour $z = \rho e^{\mathrm{i}\,\theta}$ et $z' = \rho' e^{\mathrm{i}\,\theta'}$:

- $zz' = \rho\rho' e^{\mathrm{i}\,\theta} e^{\mathrm{i}\,\theta'} = \rho\rho' e^{\mathrm{i}(\theta + \theta')}$
- $z^n = \left(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \rho^n \left(e^{\mathrm{i}\,\theta}\right)^n = \rho^n e^{\mathrm{i}\,n\theta}$
- $1/z = 1/\left(\rho e^{\mathrm{i}\,\theta}\right) = \frac{1}{\rho} e^{-\mathrm{i}\,\theta}$

— $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$

La formule de Moivre se réduit à l'égalité : $\boxed{\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}}$.

Enfin : $\rho e^{i\theta} = \rho' e^{i\theta'}$ (avec $\rho, \rho' > 0$) si et seulement si $\rho = \rho'$ et $\theta \equiv \theta' \pmod{2\pi}$.

6. Racines n-ième

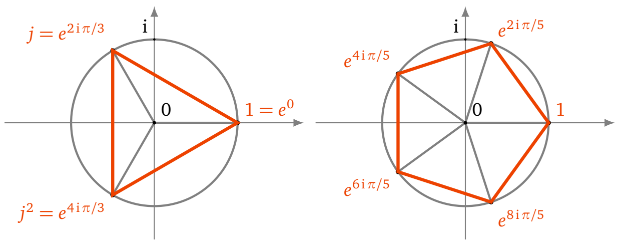
Pour $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, une ***racine n-ième*** est un nombre $\omega \in \mathbb{C}$ tel que $\omega^n = z$.

Proposition. *Il y a n racines n-ièmes $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ de $z = \rho e^{i\theta}$, ce sont :*

$$\boxed{\omega_k = \rho^{1/n} e^{\frac{i\theta + 2ik\pi}{n}} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$

Par exemple pour $z = 1$, on obtient les n ***racines n-ièmes de l'unité*** :

$$\boxed{e^{2ik\pi/n} \qquad k = 0, 1, \ldots, n-1}$$



Racine 3-ième (à gauche) et 5-ième de l'unité

7. Applications à la trigonométrie

Formules d'Euler, pour $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}}$$

Développement. On exprime $\sin n\theta$ ou $\cos n\theta$ en fonction des puissances de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
Méthode : on utilise la formule de Moivre pour écrire $\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$ que l'on développe avec la formule du binôme de Newton.

Exemple.

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta + i\sin 3\theta &= (\cos\theta + i\sin\theta)^3 \\
&= \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta \\
&= \left(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta\right) + i\left(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta\right)
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on déduit que

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta \quad \text{et} \quad \sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$$

Linéarisation. On exprime $\cos^n\theta$ ou $\sin^n\theta$ en fonction des $\cos k\theta$ et $\sin k\theta$ pour k allant de 0 à n.

Méthode : avec la formule d'Euler on écrit $\sin^n\theta = \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^n$. On développe à l'aide du binôme de Newton puis on regroupe les termes par paires conjuguées.

Exemple.

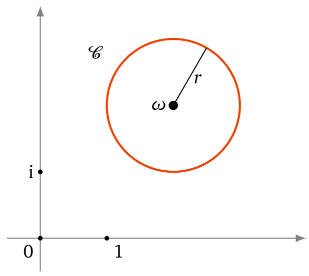
$$\begin{aligned}
\sin^3\theta &= \left(\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right)^3 \\
&= \frac{1}{-8i}\left((e^{i\theta})^3 - 3(e^{i\theta})^2 e^{-i\theta} + 3e^{i\theta}(e^{-i\theta})^2 - (e^{-i\theta})^3\right) \\
&= \frac{1}{-8i}\left(e^{3i\theta} - 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} - e^{-3i\theta}\right) \\
&= -\frac{1}{4}\left(\frac{e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}}{2i} - 3\frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\right) \\
&= -\frac{\sin 3\theta}{4} + \frac{3\sin\theta}{4}
\end{aligned}$$

8. Équation complexe d'un cercle

L'équation du cercle $\mathscr{C}(\Omega, r)$ de centre Ω, d'affixe ω et de rayon r est

$$\boxed{z\bar{z} - \bar{\omega}z - \omega\bar{z} = r^2 - |\omega|^2}$$

Il est plus simple de retrouver la formule à chaque fois : $\mathrm{dist}(\Omega, M) = r \iff |z - \omega| = r \iff |z - \omega|^2 = r^2 \iff (z - \omega)\overline{(z - \omega)} = r^2$.



9. Équation complexe d'une droite

La droite d'équation $ax + by = c$ (avec $a, b, c \in \mathbb{R}$) a pour équation complexe :

$$\boxed{\bar{\omega}z + \omega\bar{z} = k}$$

où $\omega = a + ib \in \mathbb{C}^*$ et $k = 2c \in \mathbb{R}$.

10. Équation $\frac{|z-a|}{|z-b|} = k$

Proposition. *Soit A, B deux points du plan et $k \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des points M tel que $\frac{MA}{MB} = k$ est*
- *une droite qui est la médiatrice de $[AB]$, si $k = 1$,*
- *un cercle, sinon.*